Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Calcul différentiel et intégral - MVA005

Examen de rattrapage 2011-2012 **Durée : 3h.**
Documents et téléphones : STRICTEMENT interdits

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim.

Exercice 1 (10 points) *Montrer que :*

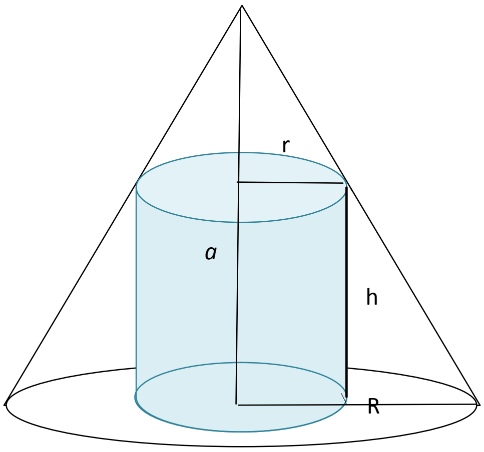
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \textit{pour } x \neq 0 \\ 0 & \textit{pour } x = 0 \end{cases}$$

est continument dérivable et étudier sa dérivée seconde en $x = 0$.

Exercice 2 (10 points) *Soit* $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 7} - x$. *Déterminez les limites suivantes (si elles existent):*

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

Exercice 3 (10 points) *Un cylindre de rayon* r *et de hauteur* h, *est inscrit dans un cône de révolution de rayon de base* R *et de hauteur* a. *Trouver, en fonction de* R *et* a, *le rayon* r *et la hauteur* h *du cylindre de plus grand volume possible.Calculer* r *et* h *pour* $R = 60\,\text{cm}$ *et* $a = 100\,\text{cm}$



Exercice 4 (25 points) *Soit la fonction:*

$$f(x) = \frac{4}{x^4 - 1}$$

1. Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ où A, B, C, D sont des réels à déterminer.
2. Calculer, alors: $I(x) = \int f(x)\,dx$.

3. En utilisant un changement convenable de variable **déduire** les intégrales:

$$J = \int \frac{d\theta}{\tan^2\theta - 1} \quad \text{et } K = \int \frac{2e^{-x}dx}{\sinh 2x}$$

Exercice 5 (20 points) *On considère l'équation différentielle:*

$$y'' - 2y' + 5y = xe^x + x^2 \tag{E}$$

1. Déterminer la solution générale de (E).
2. Trouver une solution vérifiant les conditions: $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 6 (25 points) *Soit une boule de glace G, parsuite de la fusion, sa masse varie suivant la loi: $M(t) = m - at$, où m est la masse initiale et a est une constante positive.*

La boule tombe en chute suivant la direction Oz, on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de l'objet: $f = kv$, où $v = \frac{dz}{dt}$

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\frac{d(Mv)}{dt} = Mg - f$$

1. On admet $k = 3a$. Montrer que la vitesse de G vérifie l'équation différentielle:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2a}{m - at}v = g \tag{E}$$

2. Resoudre l'équation (E),et déterminer la loi générale de la vitesse $v = v(t)$.
3. Déterminer la solution particulière telle que $v(0) = v_0 = 0$.
4. Déduire l'expression de l'élongation $z = z(t)$ telle que $z(0) = 0$.
5. Déterminer l'instant $t = t_1$ où la masse devient la moitié de la masse initiale, calculer à cet instant la vitesse et la distance parcourue
6. Déterminer l'instant $t = t_2$ où la fusion est complète ($M = 0$), calculer à cet instant la vitesse et la distance parcourue.