Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Calcul différentiel et intégral - MVA005 -

*Examen de **rattrapage** 2013-2014 -Semestre I* **Durée : 2h : 00**

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD
centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Documents, téléphones, ordinateurs : strictement interdits

Exercice 1 (10 points) Soit a un réel strictement positif et différent de 1. on considère la suite U_n définie par $U_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$U_{n+1} = \frac{1 + aU_n}{a + U_n}$$

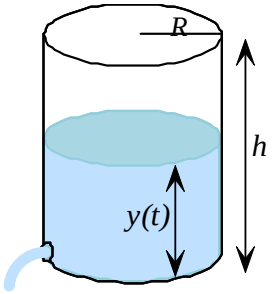
Montrer que la suite numérique V_n définie par $V_n = \dfrac{-1 + U_n}{1 + U_n}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{a-1}{a+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 (15 points) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x+1|} - 1}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Si oui, soit g son prolongement en 0.
3. Montrer que g est dérivable en 0.

Exercice 3 (25 points) On considère un récipient cylindrique de hauteur h et de rayon de base R contenant un liquide non visqueux, le récipient est percé en bas par un petit trou circulaire rayon r.



Suivant la loi de Torricelli l'écoulement du liquide est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dt} + kA\sqrt{y} = 0 \qquad (E_1)$$

Où à l'instant t :$V = V(t)$ est le volume de l'eau dans le récipient , $y = y(t)$ est sa hauteur, A est la section du trou et k une constante positive. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le récipient était plein $(y(0) = h)$.

Applications numériques : $h = 100\,\text{cm}$ $\quad R = 30\,\text{cm}$ $\quad r = 1\,\text{cm}$ $\quad k = 40\,\text{cm}^{1/2}.\,\text{s}^{-1}$

1. Montrer que l'équation (E_1) devient une équation à variables séparables sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = -k\alpha^2\sqrt{y} \qquad (E_2)$$

   où $\alpha = \dfrac{r}{R}$.
2. En intégrant l'équation (E_2) ,dèterminer la hauteur instantanée du liquide $y(t)$.
3. A quelle instant le récipient devient vide ?

Exercice 4 (25 points) On considère l'équation différentielle :

$$y'' - y' - 6y = xe^{2x} \qquad (D)$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à (D) .
2. Trouver une solution particulière de (D) .
3. Déterminer la solution générale de l'équation complète (D) .
4. Trouver la solution particulière de (D) vérifiant les conditions : $y(0) = \dfrac{3}{16}$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5 (25 points) On désigne par $f(x)$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

1. Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = Ax + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ où A, B, C sont des réels à déterminer.
2. Calculer, alors : $I = \int f(x)\,dx$.
3. En utilisant un chagement convenable de varaible Déduire $J = \int \tan^3 t dt$.