Université Libanaise **ISAE - Cnam Liban** **Centre du Liban associé au Cnam Paris**	**Date :** ***Mardi 15 Juillet 2014*** **Durée :** ***2H00*** **De** ***12H*** **à** ***14H***	**Semestre :** ***2ième*** **Année :** ***2014***
Code UE : ***MVA 006*** **Intitule de l'UE :** ***Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.***		**Ce sujet comporte :** ***2 pages***

Type d'examen :	**Semestriel**	☐ Partiel	☒ Final	€ Rattrapage	
	Annuel	€ E1	€ E'1	€ E2	€ E'2

Documents autorisés : € Tous ☒ Aucun € Autre (A préciser : ……………………………………….)

Consignes particulières : *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Calculatrice: € Aucune € Programmable ☒ Non programmable

Centres concernés	☒ **Beyrouth**	☒ **Baakline**	☒ **Baalbeck**	☒ **Nahr Ibrahim**
	☒ **Bickfaya**	☒ **Ghazza**	☒ **Tripoli**	

<u>Exercice 1:</u> (2.5 points)

Une plaque métallique, de forme circulaire, occupe le domaine suivant $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\}$ du plan Oxy. Cette plaque est chauffée de telle sorte que la température $T(x,y)$ en point (x,y) de D est donnée par : $T(x,y)=x^2+2y^2-x$

1-Calculer les dérivées partielles premières et secondes de T.

2-Déterminer la température du point A le plus froid de D (c'est-à-dire le point A de D où la température est minimale).

3-Existe-t-il un point sur la frontière de D dont la température est plus basse que celle du point A ?

<u>Exercice 2:</u> (4 pts)

Soit (C) la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\sin\left(\dfrac{t}{3}\right)\end{cases}$ où le paramètre t varie dans $\mathbb{R}$

1-Montrer que pour obtenir entièrement la courbe (C) ,il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$.

2-On pose $M(t)=(x(t)\,,y(t))$. Positionner $M(-t)$ relativement à $M(t)$. En déduire que (C) admet un axe de symétrie.

3-Positionner $M(3\pi-t)$ relativement à $M(t)$. En déduire une nouvelle symétrie axiale de (C).

4-Dresser le tableau de variations des fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sur $[0,\ \frac{3\pi}{2}]$.

Faire apparaitre dans le tableau les valeurs du rapport $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

5-Etudier l'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.

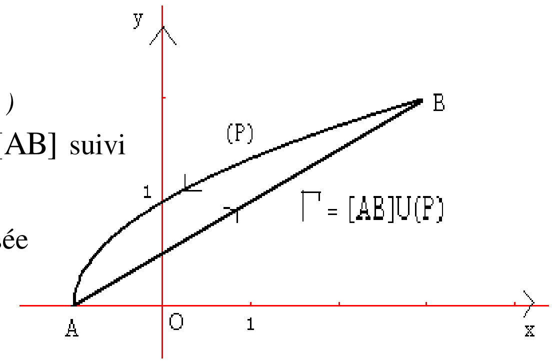
Etudier la nature du point $A(0,\ \frac{1}{2})$ pour la courbe (C).

6-Tracer la courbe (C) sur $[0,\ \frac{3\pi}{2}]$ et complétez-la en utilisant les symétries trouvées en 2) et en 3).

Exercice 3: (4 points)

Soit w la forme différentielle définie par : $w=(x-y^2)dx+xdy$

Considérons la portion de parabole (P) d'équation cartésienne $y^2=x+1$, joignant le point $\mathrm{A}(-1,0)$ au point $\mathrm{B}(3,2)$ dans le sens des y croissants.



1-Calculer la longueur de (P).

(*Indication : on pourra paramétrer la courbe* (P) *par* $x=t^2-1,\ y=t$)

2-On note $\Gamma=[\mathrm{AB}]\cup(\mathrm{P})$ la courbe fermée formée par le segment $[\mathrm{AB}]$ suivi de la portion de parabole (P).

Calculer alors la valeur de l'intégrale $I=\oint_{\Gamma^+} w$ où Γ est traversée dans le sens positif (sens contraire des aiguilles d'une montre) :

a) directement, en utilisant une paramétrisation du chemin Γ.

b) en appliquant le théorème de Green-Riemann.

3-Le champ vectoriel $\vec{F}(x,y)=(x-y^2,\ x)$ est-il un champ de gradients sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4: (2.5 points)

Soit D le domaine du plan Oxy, limité par les droites d'équations $x=y$, $x=2y$, $x+y=1$ et $x+y=3$. Dessiner D et calculer son aire en utilisant une intégrale double.

(*indication : On pourra considérer le changement de variables suivant :* $u=x+y$, $v=y$).

Exercice 5: (3 points)

Soit Ω la région de l'espace limitée en bas par le paraboloïde d'équation $z=x^2+y^2$ et en haut par le plan d'équation $z=9$.

Déterminer le volume et le centre de gravité de Ω (considérée comme un solide plein homogène).

Exercice 6: (4 points)

Considérons les matrices suivantes: $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -6 & 2 & -6\\ 9 & 0 & 8\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1-Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

2-On se propose dans cette partie de déterminer A^{-1} en utilisant les matrices P et Q.

a) Soient a,b,c trois réels non nuls. Montrer que la matrice diagonale $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$ est inversible et que sa matrice inverse est donnée par: $\begin{pmatrix}1/a & 0 & 0\\ 0 & 1/b & 0\\ 0 & 0 & 1/c\end{pmatrix}$.

b) Vérifier que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.

c) Calculer la matrice $D=QAP$. Vérifier que D est inversible et donner D^{-1}.

d) En déduire alors A^{-1}.

3-Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire (S) $\begin{cases}-x+mz=2\\ -6x+2y-6z=1\\ 9x+8z=0\end{cases}$ où m est un paramètre réel.

4-En utilisant la matrice inverse A^{-1}, retrouver la solution de (S) dans le cas où $m=0$.