Université Libanaise **ISAE - Cnam Liban** **Centre du Liban associé au Cnam Paris**	**Date :** *Lundi 22 Juin 2015* **Durée :** *2H* **De** *11H30* **à** *13H30*	**Semestre :** *2ième* **Année :** *2014-2015*
Code UE : ***MVA 006*** **Intitule de l'UE :** ***Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.***		**Ce sujet comporte :** *2 pages*

Type d'examen :	**Semestriel**	☐Partiel	☒ Final	☐Rattrapage	
	Annuel	☐ E1	☐ E'1	☐ E2	☐ E'2

Documents autorisés : ☐ Tous ☒ Aucun ☐ Autre (A préciser : ....)

Consignes particulières : *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Calculatrice: ☐ Aucune ☐ Programmable ☒ Non programmable

Centres concernés	☒ **Beyrouth**	☒ **Baakline**	☒ **Baalbeck**	☒ **Nahr Ibrahim**
	☒ **Bickfaya**	☒ **Ghazza**	☒ **Tripoli**	

Exercice 1: *(4 points)*

Considérons la fonction f de deux variables réelles définie par : $f(x,y)=3-2x^4-2y^4+4(x-y)^2$

1- Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f .

2- Trouver les points critiques de f .

3- Etudier les extrémums locaux de f .

Exercice 2 : *(5 points)*

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t^2 - 2\ln(t) \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$

1- Donner le domaine de définition cette courbe et étudier ses branches infinies.
2- Montrer que la courbe (C) admet un point singulier dont on déterminera la nature. On précisera l'équation de la tangente à (C) en ce point.
3- Dresser le tableau de variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$.
4- Etudier l'intersection de (C) avec l'axe (Ox).
5- Dessiner la courbe (C).

Exercice 3: *(3,5 points)*

Considérons l'intégrale suivante : $I = \iint_D e^{-(x^2+xy+y^2)} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$.

On pose : $\begin{cases} u = \sqrt{3}(x+y) \\ v = x - y \end{cases}$.

1-Exprimer x et y en fonction de u et v, puis calculer le jacobien $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

2-Exprimer $x^2 + xy + y^2$ en fonction de u et v. En déduire alors le nouveau domaine Δ associé à D, dans le repère Ouv.

3-Enfin, en posant $u = r\cos(\theta)$ et $v = r\sin(\theta)$, calculer alors la valeur de l'intégrale I .

Exercice 4: *(3,5 points)*

Soit Ω la région de l'espace limitée par les paraboloïdes $z = 9 - x^2 - y^2$ et $z = 2x^2 + 2y^2$.

1- Calculer le volume de Ω

2- Calculer les coordonnées du centre de gravité G de Ω, vue comme un solide homogène.

Exercice 5: *(4 points)*

Partie I :

Considérons les matrices carrées suivantes:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} , \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-Montrer que $\mathrm{B} - \mathrm{A} - 4\mathrm{I} = 0$.

2-Exprimer B^2 en fonction de B. En déduire que $\mathrm{A}^2 = -5\mathrm{A} - 4\mathrm{I}$.

3-Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Partie II :

Considérons le système linéaire suivant : (S) $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ x + y - 3z = 1 \end{cases}$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, où m est un paramètre réel.

1- En utilisant les résultats de la partie I, résoudre le système (S) dans le cas $m = -3$.

2- En discutant selon les valeurs du paramètre m, déterminer l'ensemble des solutions de (S).

3- Donner l'intersection entre les trois plans d'équations $y + z = 0$, $x - 3y + z = 1$ et $x + y - 3z = 1$.