<table>
<tr><td>Université Libanaise

ISAE - Cnam Liban

Centre du Liban associé au Cnam Paris</td><td>Date : Lundi 20 Juin 2016

Durée : 2H

De 14H à 16H</td><td>Semestre : 2ième

Année : 2015-2016</td></tr>
<tr><td colspan="2">Code UE : MVA 006
Intitule de l'UE : Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.</td><td>Ce sujet comporte : 2 pages</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Type d'examen :</td><td>Semestriel</td><td>☐ Partiel</td><td>☒ Final</td><td>☐ Rattrapage</td><td></td></tr>
<tr><td>Annuel</td><td>☐ E1</td><td>☐ E'1</td><td>☐ E2</td><td>☐ E'2</td></tr>
</table>

Documents autorisés : ☐ Tous ☒ Aucun ☐ Autre (A préciser : ....)

Consignes particulières : *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Calculatrice: ☐ Aucune ☐ Programmable ☒ Non programmable

<table>
<tr><td rowspan="2">Centres concernés</td><td>☒ Beyrouth</td><td>☒ Baakline</td><td>☒ Baalbeck</td><td rowspan="2">☒ Nahr Ibrahim</td></tr>
<tr><td>☒ Bickfaya</td><td>☒ Ghazza</td><td>☒ Tripoli</td></tr>
</table>

Exercice 1: *(4 points)*

Considérons la fonction f de deux variables réelles définie sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi \text{ et } 0 < y < \pi\}$ par : $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$

1- Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur Ω .

2- Montrer que f admet trois points critiques dans Ω, qui sont situés sur la première bissectrice.

3- Etudier les extrémums locaux de f dans Ω.

Exercice 2 : *(5 points)*

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t - 3 \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{cases}$

1- Donner le domaine de définition cette courbe et étudier ses branches infinies.

2- Calculer $x'(t)$, $y'(t)$, $x''(t)$, $y''(t)$, $x'''(t)$ et $y'''(t)$.

3- • Montrer que la courbe (C) admet un point de rebroussement dont on précisera l'espèce. On précisera l'équation de la tangente à (C) en ce point.
• La courbe (C) admet-elle des points d'inflexion ?

4- Dresser le tableau de variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$.

5- Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec les axes du repère puis dessiner (C).

Exercice 3: *(4,5 points)*

Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \iint_D (x^2+y^2)^{-3/2}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1,\ \ x+2y \leq 4,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\}$.

b) $J = \iint_D dxdy$ où D est le domaine situé dans le premier quadrant limité par les courbes d'équations $y = 2x,\quad y = \dfrac{x}{2},\quad y = \dfrac{3}{x},\quad y = \dfrac{1}{3x}$. ***Aide :*** on *pourra poser* $u = \dfrac{y}{x}$ *et* $v = xy$

c) $K = \iiint_\Omega \dfrac{\sin(\pi x^2)}{z+1}\,dxdydz$ où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq x,\ \ 0 \leq z \leq 1\}$.

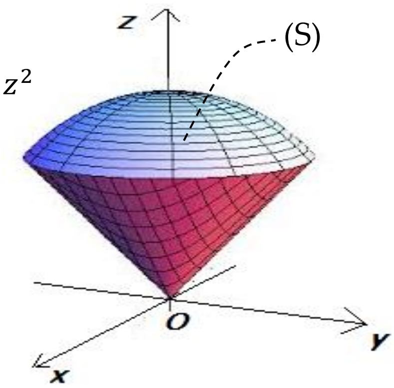
Exercice 4: *(3 points)*

Soit (S) le solide représenté ci-contre, limité par le cône d'équation $z = \sqrt{x^2+y^2}$ et la sphère d'équation $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Sachant que la densité de masse volumique de (S) est $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

a) calculer la masse M du solide (S)

b) calculer les coordonnées du centre de gravité G de (S)



Exercice 5: *(3,5 points)*

Considérons les matrices carrées suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1-Calculer A^2 .

2-Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3-Résoudre le système linéaire suivant : $(S_1)\ \begin{cases} x-2y-2z=3 \\ -2x+y-2z=0 \\ -2x-2y+z=-3 \\ mx+y+z=3m+1 \end{cases}$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, où m est un paramètre réel.

4-Considérons les matrices $M = A + 3I$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer MC. En déduire que la matrice M n'est pas inversible.

b) Résoudre le système linéaire suivant : $(S_2)\ \begin{cases} 4x-2y-2z=2 \\ -2x+4y-2z=0 \\ -2x-2y+4z=1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.