Institut des Sciences
Appliquées et Économiques
ISAE-Cnam Liban
Centre du Liban Associé au CNAM de Paris

Date:Fevier-Durée:2h
Final
2016-2017

Sujet coordonné par: J.Saab
Proposé pour les centres d'enseignement de:
Beyrouth-Baakline-Baalbek-Ghazza-
Tripoli-Bickfaya
Langue de l'éxamen: Français

Est autorisé:
Calculatrice Non Programmable

Final
Application de l'analyse à la géométrie - MVA006

1. (20pts)Soit le champ de vecteurs: $\overrightarrow{F} = -xy\overrightarrow{i} + xy\overrightarrow{j}$ et soit l'ellipse $(C) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

   (a) Calculer, directement, la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de (C) : $\oint_C \overrightarrow{F}\ \overrightarrow{dM}$

   Solution: L'équation paramétrique de (C) est

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= 2\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

   On a $\oint_C \overrightarrow{F}\ \overrightarrow{dM} = \int_0^{2\pi}[-\cos t.(2\sin t)(-\sin t) + 2\sin t\cos t(2\cos t)]dt = [2\frac{\sin^3 t}{3} - 4\frac{\cos^3 t}{3}]_0^{2\pi} = 0$

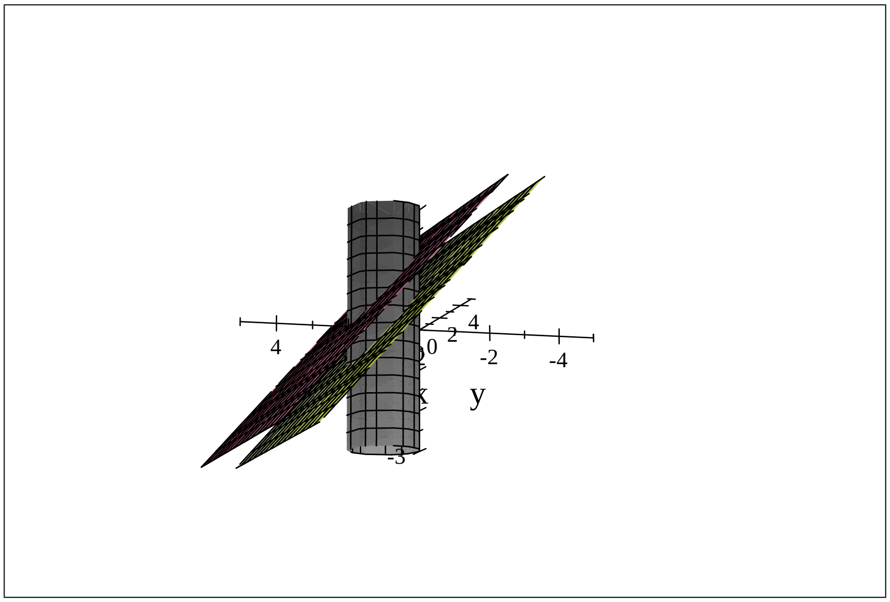
   (b) Retrouver le résultat de a) en utilisant le théorème de Green, tout en justifiant la réalisation de ses conditions.

   Solution: (C) est une courbe lisse, entourant un domaine simplement connexe D, le champs $\vec{F}$ est de classe C^1 sur D et son contour (C) alors par le théorème de Green

$$\begin{aligned} \int_{C^+} -xydx + xydy &= \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(-xy))dxdy \\ &= \iint_D (x+y)dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\cos\theta + 2\sin\theta)2rdr \\ &= [\sin\theta - 2\cos\theta]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

---

2. (20pts)Trouver le volume de la region de $\mathbb{R}^3$ limitée par le cylindre:$(x-1)^2 + y^2 = 1$, le plan $x + z = 1$ et le plan $x + z = 2$



Solution: $V = \iiint_D dxdydz = \iint_\Delta [\int_{1-x}^{2-x} dz]dxdy$ où Δ est la projection de D sur xoy c'est à dire Δ n'est autre que le disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

$$V = \iint_\Delta dxdy = A(\Delta) = \pi$$

---

3. (20pts)Trouver les points critiques de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ et déterminer la nature de chacun d'eux.

   Solution: les points critiques de f sont les solution du système

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y &= 0 \\ 4y^3 - 4x &= 0 \end{cases}$$

   on a $x = y^3$ donc $y^9 - y = 0$ c'est à dire $y(y^8 - 1) = 0$. D'où $y = 0$ ou $y = 1$ ou $y = -1$ et les points critiques sont

$$O(0,0), M(1,1), N(-1,-1)$$

   Soient $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2,\ B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2,\ C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$ et soit le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16$$

   On a $D(O) = -16 < 0$ et O est un point de selle; $D(M) = D(N) = 128 > 0$ et $A(M) = A(N) = 12 > 0$ donc M et N sont deux minimums locaux.

---

4. (20pts)**Astroïde:**

   Soit a un réel strictement positif donné et soit la courbe paramétrique définie par

$$(C) : \begin{cases} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $\overrightarrow{F(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ est une fonction periodique et déterminer sa période

   Solution: On a $\vec{F}(t + 2\pi) = \vec{F}(t)$ et $\vec{F}$ est de période 2π

(b) Montrer que pour construire entièrement la courbe (C), il suffit d'étudier (C) pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et completer sa construction en utilisant trois symétries que l'on doit préciser.

Solution: Soit $D = [-\pi, \pi]$. On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc $x^{'}x$ est un axe de symétrie, il suffit donc d'etudier $\vec{F}$ sur $[0, \pi]$. D'un autre coté, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ et donc $y^{'}y$ est un axe de symétrie et le nouveau domaine peut être $[0, \frac{\pi}{2}]$. Aussi, $x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$ et donc $y = x$ est un axe de symétrie et il suffit donc d'étudier $\vec{F}$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

(c) Montrer que le point $M(0) = (a, 0)$ est un point singulier de (C) dont on doit préciser la nature, et déduire par symétrie les trois autres points singuliers de (C)

Solution: On a

$$\left| \begin{array}{l} \vec{F}^{'}(t) \\ \vec{F}^{''}(t) \end{array} \right|_{(0)} = \left| \begin{array}{ll} -3a\cos^2 t \sin t & 3a \sin^2 t \cos t \\ -3a(-2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t) & 3a(2\sin t \cos^2 t - \sin^3 t \end{array} \right|_{(o)} = 0$$

et $M(0) = (a, 0)$ est un point singulier. $\vec{F}^{''}(0) = -3a\ \vec{i} \neq 0$ et $p = 2$.

$$\vec{F}^{'''}(t) = -3a[-2(-\sin^3 t + 2\sin t \cos^2 t) + 3\cos^2 t(-\sin t)]\ \vec{i} + 3a[2(\cos^3 t - 2\cos t \sin^2 t) - 3\sin^2 t \cos t]$$

$$\vec{F}^{'''}(0) = 6a\ \vec{j} \neq 0$$

et non colinéaire avec $\vec{F}^{''}(0)$ donc $q = 3$. Comme p est pair et q est impair alors $M(0) = (a, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce. Par symétrie par rapport a $y = x$ le point $(0, a)$ est un autre point de rebroussement de première espèce et par symétrie par rapport a $x^{'}x$ et $y^{'}y$ on obtient les points $(-a, 0)$ et $(0, -a)$ de la même nature.

(d) Calculer $||\frac{d\vec{F}(t)}{dt}||$ et puis calculer la longueur de la partie de (C) correspondant à $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, en déduire la longueur de (C).

Solution: On a $||\frac{d\vec{F}(t)}{dt}|| = \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2} = 3a \sin t \cos t$ et

$$\frac{l}{8} = 3a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\ d(\sin t) = \frac{3a}{2}\frac{1}{2} = \frac{3a}{4}$$

et la longueur totale est $l = 6a$

---

5. (20pts)Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 9 & -3 \\ 9 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que : $A^2 - AB - 2I = 0$

Solution: immédiate

(b) Déduire que A est inversible et trouver son inverse

Solution: $A[\frac{1}{2}(A - B)] = I$ donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Donner l'inverse de A par la méthode de Gauss-Jordan

Solution: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & 0 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right]$

(d) Retrouver l'inverse de A par la méthode des cofacteurs

Solution:dét$(A) = 2(1) - 1 = 1 \neq 0$ donc A est inversible et son inverse

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} cof({}^t A) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
