Université Libanaise **ISAE - Cnam Liban** **Centre du Liban associé au Cnam Paris**	**Date:** *Vendredi 23 Septembre 2016* **Durée :** *2H* **De** *14H00* **à** *16H00*	**Semestre :** *2ième* **Année :** *2015-2016*
Code UE : ***MVA 006*** **Intitule de l'UE :** ***Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.***		**Ce sujet comporte :** *2 pages*

Type d'examen :	**Semestriel**	☐ Partiel	☐ Final	☒ Rattrapage	
	Annuel	☐ E1	☐ E'1	☐ E2	☐ E'2

Documents autorisés : ☐ Tous ☒ Aucun ☐ Autre (A préciser : ....)

Consignes particulières : *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Calculatrice: ☐ Aucune ☐ Programmable ☒ Non programmable

Centres concernés	☒ **Beyrouth**	☒ **Baakline**	☒ **Baalbeck**	☒ **Nahr Ibrahim**
	☒ **Bickfaya**	☒ **Ghazza**	☒ **Tripoli**	

Exercice 1: *(4 points)*

Considérons la fonction f de deux variables réelles, définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$f(x,y)=(x-1)(y-2)(x+y-6)$

1- Montrer que les points (4, 2) et (2, 3) sont deux points stationnaires (critiques) de f.

2- La fonction f admet-elle un extrémum local en (4, 2) ?

3- La fonction f admet-elle un extrémum local en (2, 3) ?

Exercice 2 : *(4 points)*

Soit Γ la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par $\rho=\dfrac{1}{\cos(2\theta)}$.

1-Déterminer le domaine de définition de ρ.

2-Montrer que pour obtenir entièrement Γ il suffit de l'étudier et de la tracer pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]-\{\frac{\pi}{4}\}$, puis d'effectuer deux symétries que l'on précisera.

3-Calculer $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\rho(\theta)\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})$. En déduire les branches infinies de la courbe Γ.

4-Etudier les variations de ρ sur $[0,\frac{\pi}{2}]-\{\frac{\pi}{4}\}$. Préciser les tangentes à Γ en $M(\theta=0)$ et en $M(\theta=\dfrac{\pi}{2})$.

5-Tracer la courbe Γ.

Exercice 3: *(3 points)*

Soit $\vec{V}$ le champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^2$ par: $\vec{V}(x,y) = y^2\vec{i} + (x^2+2xy)\vec{j}$.

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le domaine Ω situé à l'extérieur du cercle d'équation $x^2+y^2=4$ et à l'intérieur du cercle d'équation $(x-2)^2+y^2=4$.

On note (C) la frontière du domaine Ω orientée dans le sens direct.

1-Calculer l'intégrale curviligne $I = \oint_{(C)} \vec{V}.d\overrightarrow{OM}$

a) par calcul direct.
b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

2-Le champ $\vec{V}$ est-il un champ de gradients sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4: *(2,5 points)*

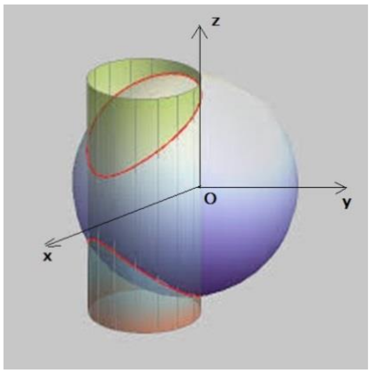
On considère une plaque métallique sous la forme d'un domaine D limité, dans le plan Oxy, par les deux courbes d'équations $y = x^2-4$ et $y=3x$. On suppose que la densité de masse de D est donnée par la fonction $\sigma(x,y) = x+2$.

1-Dessiner D et calculer son aire.

2-Déterminer la masse de la plaque D.

Exercice 5: *(2,5 points)*

Calculer le volume de la région Ω de l'espace $Oxyz$ limitée par le cylindre d'équation $x^2+y^2=x$ et la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.



Exercice 6: *(4 points)*

Considérons les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Calculer N^2 et N^3 .

2- Développer puis simplifier l'expression $(I-N)(I+N+N^2)$.

3- En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

4- Déterminer la matrice X vérifiant la relation $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5-Résoudre le système linéaire suivant dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x+my+mz=1 \\ -x+y=0 \\ -x-y+z=1 \end{cases}$ où m est un paramètre réel.