MVA 006 - Final 2ième Session - Septembre 2013

Exercice 1 :

1) ■ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$2+2x+x^2+y^2 = 1+(x+1)^2+y^2 > 0$

$\Rightarrow f$ est de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^2$

■ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$* \; f'_x(x,y) = \dfrac{2+2x}{2+2x+x^2+y^2}$

$* \; f'_y(x,y) = \dfrac{2y}{2+2x+x^2+y^2}$

$* \; f''_{xx}(x,y) = \dfrac{2(2+2x+x^2+y^2)-(2+2x)^2}{(2+2x+x^2+y^2)^2} = \dfrac{-4x-2x^2+2y^2}{(2+2x+x^2+y^2)^2}$

$* \; f''_{yy}(x,y) = \dfrac{2(2+2x+x^2+y^2)-4y^2}{(2+2x+x^2+y^2)^2} = \dfrac{4+4x+2x^2-2y^2}{(2+2x+x^2+y^2)^2}$

$* \; f''_{xy}(x,y) = \dfrac{-2y(2+2x)}{(2+2x+x^2+y^2)^2} = \dfrac{-4y-4xy}{(2+2x+x^2+y^2)^2}$

---

2) le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage de $(-1,0)$ est donné par :

$f(-1+h,k) =$

$f(-1,0) + hf'_x(-1,0) + kf'_y(-1,0)$

$+ \frac{1}{2}\left[h^2 f''_{xx}(-1,0) + 2hk f''_{xy}(-1,0) + k^2 f''_{yy}(-1,0)\right]$

$+ (h^2+k^2)\,\varepsilon(h,k)$

où :

$$\begin{cases} f(-1,0) = \ln 1 = 0 \\ \cdot\, f'_x(-1,0) = 0 \\ \cdot\, f'_y(-1,0) = 0 \\ \cdot\, f''_{xx}(-1,0) = 2 \\ \cdot\, f''_{yy}(-1,0) = 2 \\ \cdot\, f''_{xy}(-1,0) = 0 \end{cases}$$

Avec $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$

Donc le dév. cherché est :

$f(-1+h,k) = \frac{1}{2}\left[2h^2+2k^2\right] + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$

$= (h^2+k^2) + (h^2+k^2)\,\varepsilon(h,k)$

Que l'on peut aussi écrire :

$f(x,y) = (x+1)^2+y^2 + ((x+1)^2+y^2)\,\varepsilon_1(x,y)$

où $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,0)} \varepsilon_1(x,y) = 0$

---

3) ● D'après le développement de Taylor on peut déduire que le plan tangent (P) a pour équation cartésienne $z=0$

● la surface (S) est située au dessus de (P) car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) - 0$

$= \ln(2+2x+x^2+y^2) - 0$

$= \ln(\underbrace{1+(x+1)^2+y^2}_{\geq 1}) \geq 0$

4) Points stationnaires de f :

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Donc f admet un seul point critique (stationnaire) qui est le point : $A(-1,0)$

Conditions suffisantes :

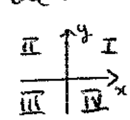
$$\begin{cases} D(-1,0) = \left[f''_{xy}(-1,0)\right]^2 - \left[f''_{xx}(-1,0)\right]\left[f''_{yy}(-1,0)\right] \\ \quad = [0]^2 - [2]\times[2] < 0 \\ f''_{xx}(-1,0) = 2 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f admet un minimum local en $A(-1,0)$

Exercice 2 :

1) $\vec{F}(t) = (x(t)\,;\, y(t))$

Le domaine de définition de $\vec{F}$ est $D_{\vec{F}} = \mathbb{R} - \{1\}$



$\boxed{\text{en } -\infty}$

* $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{-\infty} t-2+\frac{1}{t-1} = -\infty$
* $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = \lim\limits_{-\infty} 1-\frac{1}{t-1} = 1^+$

$\Rightarrow$ la courbe (C) admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$ (cette branche $\in$ quadrant II)

$\boxed{\text{en } 1^-}$

* $\lim\limits_{1^-} x = \lim\limits_{1^-} \left(t-2+\frac{1}{t-1}\right) = -\infty$
* $\lim\limits_{1^-} y = \lim\limits_{1^-} \left(1-\frac{1}{t-1}\right) = +\infty$
* $\lim\limits_{1^-} \frac{y}{x} = \lim\limits_{1^-} \dfrac{1-\frac{1}{t-1}}{t-2+\frac{1}{t-1}} = \lim\limits_{1^-} \dfrac{t-2}{(t-2)(t-1)+1} = -1$
* $\lim\limits_{1^-} y+x = \lim\limits_{1^-} t-1 = 0^-$

$\Rightarrow$ (C) admet au voisinage de 1^- la droite d'équation $y=-x$ comme asymptote oblique (cette branche est située dans le quadrant II)

$\boxed{\text{en } 1^+}$

* $\lim\limits_{1^+} x = +\infty$
* $\lim\limits_{1^+} y = -\infty$
* $\lim\limits_{1^+} \frac{y}{x} = -1$
* $\lim\limits_{1^+} y+x = \lim\limits_{1^+} t-1 = 0^+$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de 1^+ (cette branche $\in$ quadrant IV)

$\boxed{\text{en } +\infty}$

* $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$
* $\lim\limits_{+\infty} y = 1$

$\Rightarrow$ La droite d'équation $y=1$

est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$ (Cette branche $\in$ quadrant (I))

2) $\forall\, t \in \mathbb{R}-\{1\}$

* $x'(t) = 1 - \dfrac{1}{(t-1)^2} = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$

* $y'(t) = \dfrac{1}{(t-1)^2} > 0$

d'où le tableau des variations de x et y :

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
y	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

3) $\forall\, t \in \mathbb{R}-\{1\}$:

* $x''(t) = \dfrac{2}{(t-1)^3}$

* $y''(t) = \dfrac{-2}{(t-1)^3}$

$\det(\vec{F'(t)}, F''(t)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \left(1-\dfrac{1}{(t-1)^2}\right)\left(\dfrac{2}{(t-1)^3}\right) - \left(\dfrac{1}{(t-1)^2}\right)\left(\dfrac{2}{(t-1)^3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left((t-1)^2-1\right)(-2) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2-2t+1 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$: inacceptable!

Donc (C) n'admet ni point de rebroussement, ni point d'inflexion. (Tous ses points sont ordinaires)

4) intersection avec les axes :

* avec l'axe $(y'y)$: $x(t)=0$

$\Leftrightarrow t-2+\dfrac{1}{t-1} = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t-1)+1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2-3t+3 = 0$

$\Delta < 0$

$\Longrightarrow$ pas de solution

Donc (C) ne coupe pas l'axe $y'y$

* avec l'axe $(x'x)$: $y(t)=0$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{t-1} = 0$

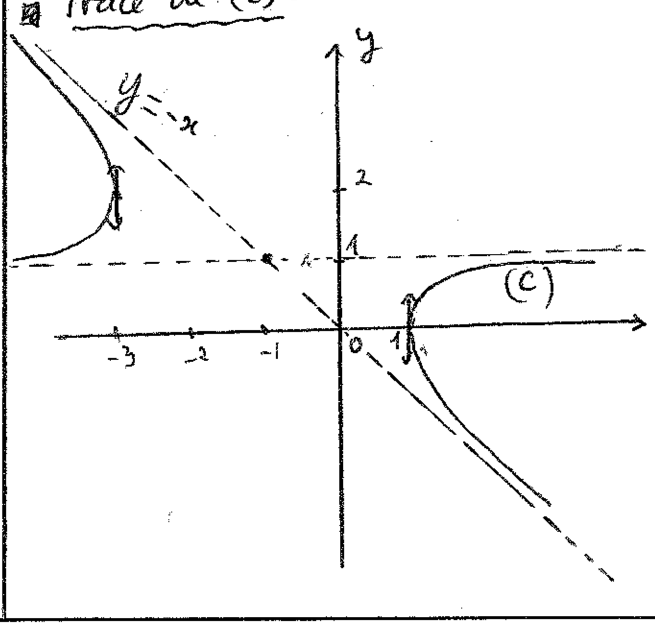
$\Leftrightarrow t-1 = 1$

$\Leftrightarrow t = 2$

Pour $t=2 \longrightarrow x(t=2) = 1$

Donc (C) coupe l'axe $(x'x)$ au point de coordonnées $(1,0)$:

Tracé de (C) :



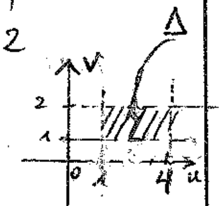
Exercice 3 :

L'aire de $\mathcal{D}$ est $\mathcal{A}=\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy$

Pour cela on pose $\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}$

- $(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u \leq 4 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (u,v) \in \Delta$



où $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ;\ 1 \leq u \leq 4 ,\ 1 \leq v \leq 2\}$

- Jacobien ?

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = ?$$

$$* \quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 1$$

$$= 3 \quad \Rightarrow J = \frac{1}{3}$$

- $\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{D}} dx\,dy$

$$= \iint_{\Delta} |J| .\, du\,dv$$

$$= \iint_{\Delta} \frac{1}{3}\, du\,dv$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Delta} du\,dv$$

$$= \frac{1}{3} \times 3 \times 1$$

$= 1$ unité d'aire

Exercice 4 :

1) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

- sur Da : $\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2} \\ r \text{ varie de } 0 \text{ à } a \end{cases}$

$$J_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a -2r e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-r^2}\right]_0^a$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\left(e^{-a^2} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

- De même $J_{2a} = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-(2a)^2}\right)$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-4a^2}\right)$$

---

2) • $\lim\limits_{a \to +\infty} J_a = \lim\limits_{a \to +\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-a^2}\right)$

$$= \frac{\pi}{4}(1 - 0)$$

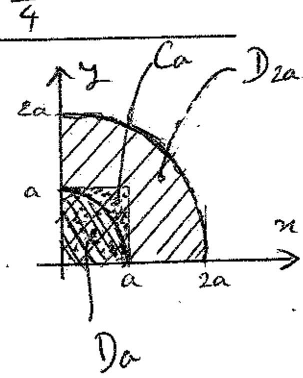
$$= \frac{\pi}{4}$$

• $\lim\limits_{a \to +\infty} J_{2a} = \lim\limits_{a \to +\infty} \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-4a^2}\right)$

$$= \frac{\pi}{4}$$

---

3)



- $D_a \subset C_a \subset D_{2a}$

$\Rightarrow J_a \leq K_a \leq J_{2a}$

- $\lim\limits_{a \to +\infty} J_a = \lim\limits_{a \to +\infty} J_{2a} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{a \to +\infty} K_a = \frac{\pi}{4}$ par comparaison

4) $K_a = \int_0^a dx \int_0^a e^{-(x^2+y^2)} dy$

$= \int_0^a e^{-x^2} dx \cdot \int_0^a e^{-y^2} dy$

$= I_a \times I_a$

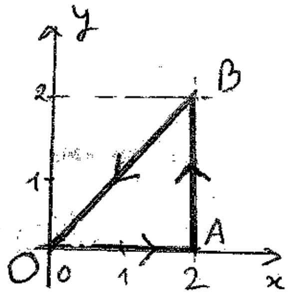
$= I_a^2$

$I^2 = \lim_{a \to +\infty} I_a^2 = \lim_{a \to +\infty} K_a = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (car $I > 0$)

Exercice 5 :

1)



$\omega = (y^2 - 2x)dx + (1-2xy)dy$

$I = \int_\Gamma \omega = \underbrace{\int_{[OA]} \omega}_{I_1} + \underbrace{\int_{[AB]} \omega}_{I_2} + \underbrace{\int_{[BO]}}_{I_3}$

* $\boxed{I_1 = ?}$

Sur $[OA]$: $y = 0 \to dy = 0$
x varie de 0 à 2

$I_1 = \int_0^2 -2x\,dx = -[x^2]_0^2$

$= -4$

* $\boxed{I_2 = ?}$

Sur $[AB]$: $\begin{cases} x = 2 \to dx = 0 \\ y \text{ varie de } 0 \text{ à } 2 \end{cases}$

$I_2 = \int_0^2 (1-4y)dy$

$= [y - 2y^2]_0^2 = -6$

* $\boxed{I_3 = ?}$

Sur $[BO]$: $\begin{cases} y = x \to dy = dx \\ x \text{ varie de } 2 \text{ à } 0 \end{cases}$

$I_3 = \int_2^0 (x^2 - 2x + 1 - 2x^2) dx$

$= -\int_0^2 (-x^2 - 2x + 1) dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_0^2$

$= \frac{8}{3} + 4 - 2 = \frac{14}{3}$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + I_3$

$= -4 - 6 + \frac{14}{3}$

$= -\frac{16}{3}$

2) $\begin{cases} P(x,y) = y^2 - 2x \\ Q(x,y) = 1 - 2xy \end{cases}$

- P, Q : de classe C^1 sur Γ et à l'intérieur de Γ
- Γ : chemin fermé simple

Le théorème de Green nous dit :

$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

$= \iint_D [-2y - 2y] dx\,dy$

$= -4 \iint_D y\,dx\,dy$

$= -4 \int_0^2 dx \int_0^x y\,dy$

$$I = -4\int_0^2\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x\right)dx$$
$$= -2\int_0^2 x^2 dx$$
$$= -2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$
$$= -2\times\frac{8}{3}$$
$$= -\frac{16}{3}$$

3) ▪ Masse de D : $M = ?$

$$M = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$
$$= \iint_D y\,dxdy$$
$$= -\frac{1}{4}I$$
$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{4}{3}$$ unité de masse

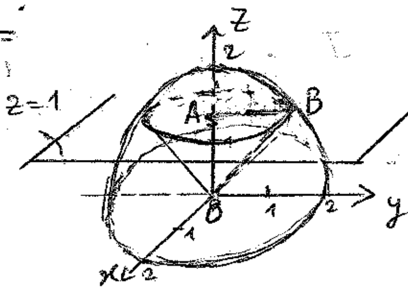
▪ Centre de gravité : G

$$* \; x_G = \frac{1}{M}\iint_D x f(x,y)\,dxdy$$
$$= \frac{3}{4}\iint_D xy\,dxdy$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^2 x\,dx\int_0^x y\,dy$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^2 x\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x\right)dx$$
$$= \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx$$
$$= \frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$
$$= \frac{3}{2}$$

$$* \; y_G = \frac{1}{M}\iint_D y f(x,y)\,dxdy$$
$$= \frac{3}{4}\iint_D y^2 dxdy$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^2 dx\int_0^x y^2 dy$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^2\left(\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x\right)dx$$
$$= \frac{4}{9}\int_0^2 x^3 dx$$
$$= \frac{4}{9}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$
$$= \frac{16}{9}$$
$$\Rightarrow G\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{16}{9}\right)$$

Exercice 6 :

$OA = 1$
$OB = 2$
$AB = \sqrt{3}$



Le volume de (S) est

$$V = \iiint_\Omega dxdydz$$
$$= \frac{1}{2}V_{sphère} - V_{\Omega_1}$$

où

Ω_1 = la calotte sphérique définie par $z \geq 1$ et $x^2+y^2+z^2 \leq 4$

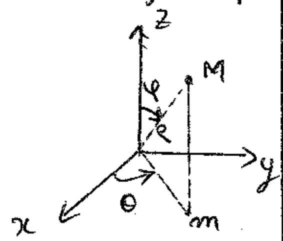
Donc $V = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi(2)^3 - V_{\Omega_1}$
$$= \frac{16}{3}\pi - V_{\Omega_1}$$

* $V_{\Omega_1} = ?$

$$V_{\Omega_1} = \iiint_{\Omega_1} dx\,dy\,dz$$

Passons aux coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



Sur Ω_1 :

$$\begin{cases} \theta \text{ varie de } 0 \text{ à } 2\pi \\ \varphi \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi/3 \\ \rho \text{ varie de } \frac{1}{\cos\varphi} \text{ à } 2 \end{cases}$$

car $\begin{cases} \cdot\ \widehat{AOB} = \pi/3 \\ \cdot\ z = 1 \\ \Rightarrow \rho\cos\varphi = 1 \\ \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\varphi} \end{cases}$

Donc

$$V_{\Omega_1} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin\varphi\, d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} \rho^2\, d\rho$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/3} \sin\varphi \left(8 - \frac{1}{\cos^3\varphi} \right) d\varphi$$

$t = \cos\varphi \Rightarrow dt = -\sin\varphi\, d\varphi$

$$V_{\Omega_1} = -\frac{2\pi}{3} \int_1^{1/2} \left(8 - \frac{1}{t^3}\right) dt$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[8t + \frac{1}{2t^2} \right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[8 + \frac{1}{2} - 4 - 2 \right]$$

$$= \frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{16}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi = \frac{11}{3}\pi$$

unités de volume

Autre méthode :

Ω_2 = Cône de sommet O et de rayon AB

Ω_3 = demi-sphère privée du cône.

Le volume de (S) est alors

$$V = V_{\Omega_2} + V_{\Omega_3}$$

* V_{Ω_2} = volume du cône

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^2 \times 1$$

$$= \pi$$

* V_{Ω_3} = volume de Ω_3

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^2 \rho^2\, d\rho$$

$$= 2\pi \left[-\cos\varphi \right]_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \left(16\frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

$$\Rightarrow V = V_{\Omega_2} + V_{\Omega_3}$$

$$= \pi + \frac{8}{3}\pi$$

$$= \frac{11}{3}\pi$$

unités de volume.

<u>Exercice 7 :</u>

1) ▪ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$= 4I$

▪ $\frac{1}{4}A^2 = I \Rightarrow A\left(\frac{1}{4}A\right) = I$

Donc A est inversible et

$A^{-1} = \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

---

2) • $A^3 = A^2 \cdot A = (4I)(A) = 4A$

• $A^4 = A^3 \cdot A = 4A^2 = 16I$

• $A^{10} = (A^2)^5 = (4I)^5 = 4^5 \cdot I = 1024 I$

• $A^{2013} = A^{2012} \cdot A = (A^2)^{1006} \cdot A$

$= (4I)^{1006} \cdot A$

$= 4^{1006} \cdot A$

$= 2^{2012} \cdot A$

---

3) le système donné s'écrit :

$AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $X = A^{-1} \cdot B$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Le système admet donc une solution unique : $\left(0 ; \frac{-1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

4) a) $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: c'est l'unique solution de l'équation matricielle

---

b) $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad X = \underbrace{\underset{(3,3)}{A^{-1}} \cdot \underset{(3,2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{(3,2)} \cdot \underset{(3,3)}{A^{-1}}$

d'où X n'existe pas !

Donc l'équation matricielle n'a pas de solution.