Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Analyse et calcul matriciel (MVA101) **Examen Final 2009-2010**

Solutions

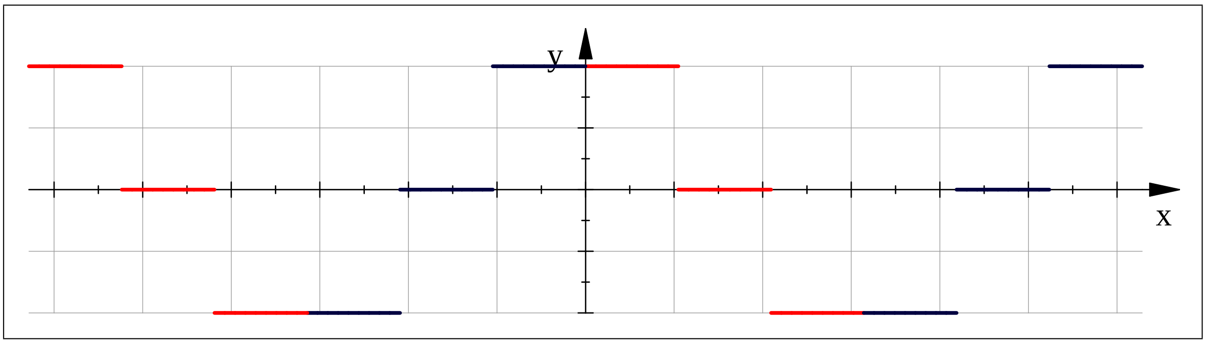
Exercice 1 ***On désigne par*** α ***un nombre réel positif tel que*** $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

On considère la fonction périodique de période 2π **définie sur** $]-\pi, \pi[$ **par :** $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & si \quad \alpha < t < \pi - \alpha \\ -1 & si \quad \pi - \alpha \leq t \leq \pi \end{cases}$ **et sur** $]-\pi, 0[$ **son symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.**

1. $f(t)$ **est- elle une fonction paire?.**
2. **Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction** $f(t)$ **sur l'intervalle** $]-2\pi, 2\pi[$ **(pour simplifier on choisit pour cette question** $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ **)**
3. **Calculer, pour une valeur quelconque du nombre réel** α**, les coefficients réels de la série de Fourier de** $f(t)$.
4. **Déterminer,en fonction de** k, **les valeurs de** α,**qui peut éliminer l'harmonique d'ordre** $2k+1$. **Donner** 3 **exemples.**
5. **Déduire les sommes:** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)}$ **et** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$.

Solution.

1. A cause de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées la fontion est donc paire.
2. Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$: $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{3} \\ 0 & si \quad \dfrac{\pi}{3} < t < \dfrac{2\pi}{3} \\ -1 & si \quad \dfrac{2\pi}{3} \leq t \leq \pi \end{cases}$



3. $f(t)$ est une fonction paire donc $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$, $T = 2\pi \Longrightarrow \omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\alpha} dt - \int_{\pi-\alpha}^{\pi} dt\right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\alpha} \cos ntdt - \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \cos ntdt\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{\sin nt}{n}\right|_0^{\alpha} - \left.\frac{\sin nt}{n}\right|_{\pi-\alpha}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\alpha - \sin n\pi + \sin(n\pi - n\alpha)\right)$$

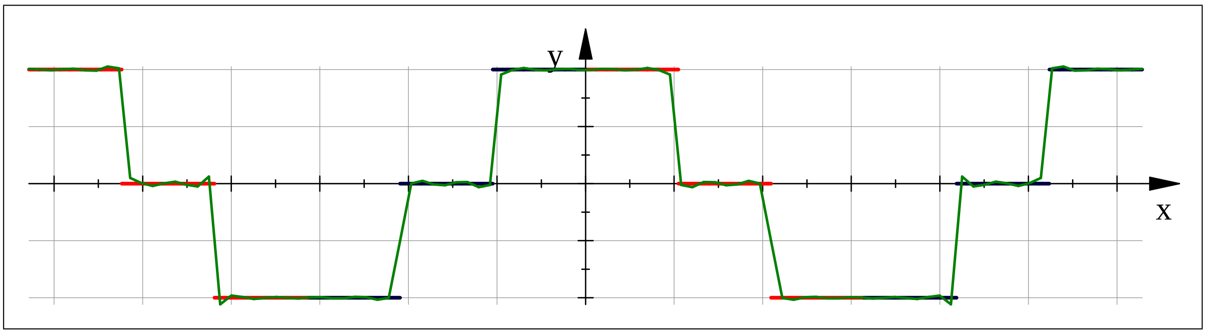
$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\alpha + \sin n\pi \cos n\alpha - \cos n\pi \sin n\alpha\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\alpha - \cos n\pi \sin n\alpha\right) = \frac{2\sin n\alpha}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Pour $n = 2k : a_{2k} = 0$

Pour $n = 2k+1 : a_{2k+1} = \dfrac{4\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\pi}$

$$S(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)} \cos(2k+1)t$$

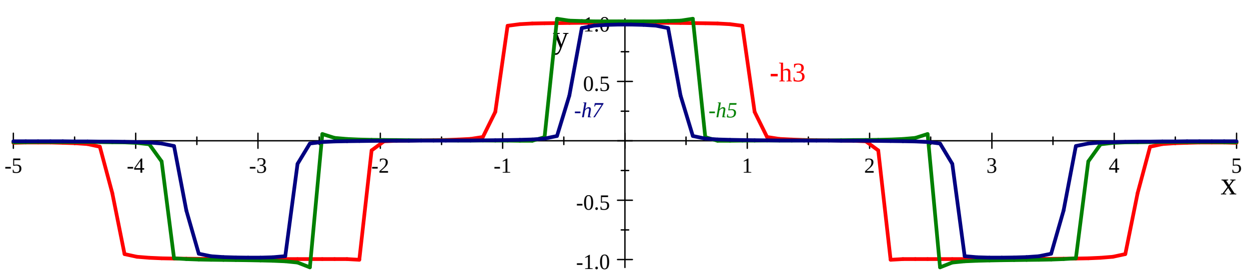


4. $a_{2k+1} = 0 \rightarrow \sin(2k+1)\alpha = 0 \Longrightarrow (2k+1)\alpha = \pi \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2k+1}$

$k = 1 \rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow h_3 = 0$

$k = 2 \rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{5} \rightarrow h_5 = 0$

$k = 3 \rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{7} \rightarrow h_7 = 0$



5. La fonction est continue au point $t = 0 \Longrightarrow S(0) = f(0)$.

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)}\cos(2k+1)t\bigg|_{t=0} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)} = f(0) = 1.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4} \quad \text{cas ou } \alpha = \frac{\pi}{2} : \sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$$

■

Exercice 2 ***On considère la fonction***

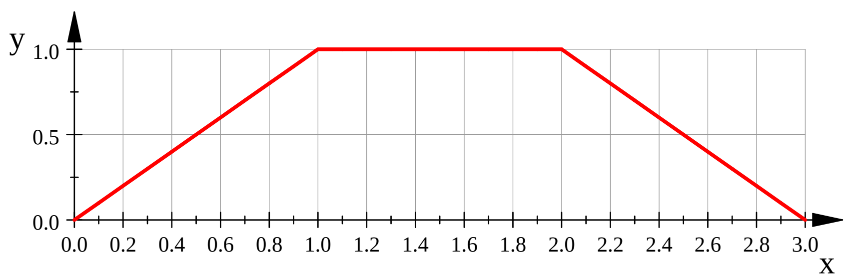
$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & si \quad 1 \le t \le 2 \\ 3-t & si \quad 2 \le t \le 3 \end{cases} \quad \textit{et nulle ailleurs}$$

1. **Tracer le graphe de** $f(t)$
2. **Calculer la transformée de Fourier de** $f(t)$.
3. **Déduire la transformée de** $g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} 4 & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & si \quad 1 \le t \le 2 \\ -4 & si \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Solution.

1. *Graphe*



2. $F(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt$

$$= \int_0^1 t\exp(-2j\pi\nu t)\,dt + \int_1^2 (1)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt + \int_2^3 (3-t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt$$

$$\underline{I = \int_0^1 t \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt}$$

Intégration par parties : $\left\{ \begin{array}{ccc} u = t & \Longrightarrow & du = dt \\ \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt & \Longrightarrow & v = -\dfrac{1}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu t\right) \end{array} \right.$

$$I = -\frac{t}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu t\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2j\pi\nu} \int_0^1 \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu\right) - \frac{1}{4j^2\pi^2\nu^2} \exp\left(-2j\pi\nu t\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu\right) + \frac{\exp\left(-2j\pi\nu\right) - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

$$\underline{J = \int_1^2 (1) \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt} = -\frac{1}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu t\right)\Big|_1^2 = -\frac{\exp\left(-4j\pi\nu\right) - \exp\left(-2j\pi\nu\right)}{2j\pi\nu}$$

$$\underline{K = \int_2^3 (3-t) \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt}$$

Intégration par parties : $\left\{ \begin{array}{ccc} u = 3 - t & \Longrightarrow & du = -dt \\ \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt & \Longrightarrow & v = -\dfrac{1}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu t\right) \end{array} \right.$

$$K = -\frac{3-t}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu t\right)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{2j\pi\nu} \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt$$

$$= \frac{\exp\left(-4j\pi\nu\right)}{2j\pi\nu} + \frac{\exp\left(-2j\pi\nu t\right)}{4j^2\pi^2\nu^2}\Big|_2^3 = \frac{\exp\left(-4j\pi\nu\right)}{2j\pi\nu} - \frac{\exp\left(-6j\pi\nu\right) - \exp\left(-4j\pi\nu\right)}{4\pi^2\nu^2}$$

$$\underline{F\left(\nu\right) = I + J + K}$$

$$= -\frac{\exp\left(-2j\pi\nu\right)}{2j\pi\nu} + \frac{\exp\left(-2j\pi\nu\right) - 1}{4\pi^2\nu^2} - \frac{\exp\left(-4j\pi\nu\right) - \exp\left(-2j\pi\nu\right)}{2j\pi\nu} + \frac{\exp\left(-4j\pi\nu\right)}{2j\pi\nu} -$$

$$\frac{\exp\left(-6j\pi\nu\right) - \exp\left(-4j\pi\nu\right)}{4\pi^2\nu^2}$$

$$= \frac{-\exp\left(-2j\pi\nu\right) - \exp\left(-4j\pi\nu\right) + \exp\left(-2j\pi\nu\right) + \exp\left(-4j\pi\nu\right)}{2j\pi\nu}$$

$$+ \frac{\exp\left(-2j\pi\nu\right) - 1 - \exp\left(-6j\pi\nu\right) + \exp\left(-4j\pi\nu\right)}{4\pi^2\nu^2}$$

$$F(\nu)=\frac{-1+\exp(-2j\pi\nu)+\exp(-4j\pi\nu)-\exp(-6j\pi\nu)}{4\pi^2\nu^2}$$

3. $f(t)=\begin{cases} t & si\ \ 0\leq t\leq 1\\ 1 & si\ \ 1\leq t\leq 2\\ 3-t & si\ \ 2\leq t\leq 3\end{cases} \Longrightarrow f'(t)=\begin{cases} 1 & si\ \ 0\leq t\leq 1\\ 0 & si\ \ 1\leq t\leq 2\\ -1 & si\ \ 2\leq t\leq 3\end{cases}$

   Donc $g(t)=4f'(t)$

   Or $\mathcal{F}\left[f^{(p)}(t)\right]=(2j\pi\nu)^p F(\nu)\Longrightarrow \mathcal{F}(f'(t))=2j\pi\nu F(\nu)\Longrightarrow$

$$G(\nu)=4j\frac{-1+\exp(-2j\pi\nu)+\exp(-4j\pi\nu)-\exp(-6j\pi\nu)}{2\pi\nu}$$

■

Exercice 3 ***Dans l'espace vectoriel*** R^3***,on définit l'endomorphisme*** f :

$$\forall(a,b,c)\in\mathbf{R}^3\xrightarrow{f}\mathbf{f}(a,b,c)=(2b-a+2c,2a-b+2c,2a-c+2b)$$

1. **Déterminer la matrice** $A=M(f,E)$ **où** E **est la base canonique de** R^3.
2. **Calculer** A^2 **et** A^3.
3. **Déduire une expression de** A^n **en fonction de** n**.**
4. **Soit** $V=(a,b,c)$**. Montrer que** $(f\circ f)(V)=aV$ **où** a **est une constante à déterminer.**
5. **Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de** f
6. **Déduire la solution du système différentielle**:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y-x+2z\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y+2z\\ \dfrac{dz}{dt}=2x+2y-z\end{cases}$$

   où x,y,z **sont trois fonctions de la variables** t.

Solution.

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I = 3^2 I$

   $A^3 = A^2 A = 3^2 I A = 3^2 A$

3. on démontre par reccurence:

   que $A^n = \begin{cases} 3^{2k} I & si\ n = 2k \\ 3^{2k} A & si\ n = 2k+1 \end{cases}$

4. Soit $V = (x, y, z)$, on a donc $f(V) = AV$

   $(f \circ f)(V) = f(f(V)) = Af(V) = A^2 V = 9IV = 9V$

5. Les valeurs propres de f sont celles de A et donc sont les racines de l'équation caractéristique : $P(X) = 0$

   $$P(X) = |A - XI| = \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 2 \\ 2 & -1-X & 2 \\ 2 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = -X^3 - 3X^2 + 9X + 27$$

   $$= -X^2(X+3) + 9(X+3) = -(X^2 - 9)(X+3) = -(X-3)(X+3)^2$$

   $$P(X) = 0 \Longrightarrow -(X-3)(X+3)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} X = 3 & \text{une racine simple} \\ X = -3 & \text{une racine double} \end{cases}$$

   Les vecteurs propores sont v tels que $Av = \lambda v$

   Pour $\lambda_1 = 3 \rightarrow Av = 3v$

   si $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow Av = 3v \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

   Donc $\begin{cases} 2b - a + 2c = 3a \\ 2a - b + 2c = 3b \\ 2a + 2b - c = 3c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + c = 2a \\ a + c = 2b \\ a + b = 2c \end{cases} \Longrightarrow [a = b = c]$ soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Pour $\lambda_1 = -3 \rightarrow Av = -3v$ donc on trouve:

   $$\begin{cases} 2b - a + 2c = -3a \\ 2a - b + 2c = -3b \\ 2a + 2b - c = -3c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \rightarrow a = -b - c$$

   $$V_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Soit $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Soit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le système s'écrit : $Y' = AY$

Sa solution est de la forme . $\sum C_k V_k \exp(\lambda_k t)$ puisque λ_2 est une racine double alors la solution est de la forme:

$Y = C_1 V_1 \exp(3t) + (C_2 V_2 + C_3 V_3) \exp(-3t)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-3t}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + (-C_2 - C_3) e^{-3t} \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \\ z = C_1 e^{3t} + C_3 e^{-3t} \end{cases}$$

■

Exercice 4 ***Soit $e(t)$ une fonction causale définie par:***

$$e(t) = \begin{cases} -3 & si & 0 < t < 1 \\ 0 & si & 1 < t < 2 \\ 3 & si & 2 < t < 3 \\ 0 & si & 3 < t < 4 \\ -3 & si & 4 < t < 5 \end{cases}$$

1. **Tracer le graphe de** $e(t)$.
2. **Calculer, en utilisant la définition, la transformée de Laplace de** $e(t)$.
3. **Exprimer** $e(t)$ **en fonction de l'échelon unité** $u_a(t) = u(t-a)$ **et retrouver sa transformée de Laplace.**
4. **Déterminer la fonction originale** $g(t)$ **dont la transformée de Laplace est**

$$H(p) = \frac{1}{p^3 - 4p^2 + 13p}$$

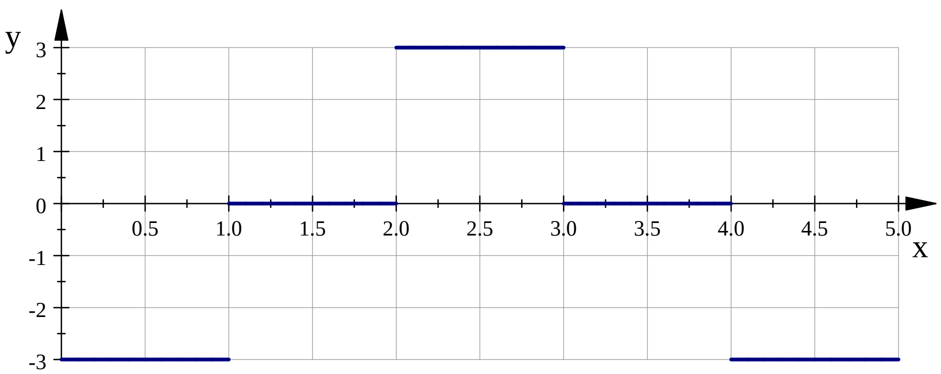
5. **Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, l'équation différentielle:**

$$y'' - 4y' + 13y = e(t)$$

où $y = y(t)$ **et** $y(0) = y'(0) = 0$

Solution.

1. Graphe de $e(t)$



2. $E(p) = -3\int_0^1 e^{-pt}dt + 3\int_2^3 e^{-pt}dt - 3\int_4^5 e^{-pt}dt$

$= 3\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^1 - 3\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_2^3 + 3\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_4^5$

$= 3\frac{e^{-p}-1}{p} - 3\frac{e^{-3p}-e^{-2p}}{p} + 3\frac{e^{-5p}-e^{-4p}}{p}$

$= \frac{3}{p}\left(-1 + e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p} - e^{-4p} + e^{-5p}\right)$

3. $e(t) = -3u(t) + 3u(t-1) + 3u(t-2) - 3u(t-3) - 3u(t-4) + 3u(t-5)$

$\mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-ap}}{p}$

$E(p) = -3\frac{1}{p} + 3\frac{e^{-p}}{p} + 3\frac{e^{-2p}}{p} - 3\frac{e^{-3p}}{p} - 3\frac{e^{-4p}}{p} + 3\frac{e^{-5p}}{p}$

4. $H(p) = \frac{1}{p^3-4p^2+13p} = \frac{1}{13p} - \frac{1}{13}\frac{p-4}{p^2-4p+13}$

$= \frac{1}{13p} - \frac{1}{13}\frac{p-4}{p^2-4p+4+9} = \frac{1}{13}\left(\frac{1}{p} - \frac{p-2-2}{(p-2)^2+9}\right)$

$= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{p} - \frac{p-2}{(p-2)^2+9} + \frac{2}{(p-2)^2+9}\right)$

$= \frac{1}{13}\left(\frac{1}{p} - \frac{p-2}{(p-2)^2+9} + \frac{2}{3}\frac{3}{(p-2)^2+9}\right)$

$= \frac{1}{13}\left(\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(e^{2t}\cos 3t) + \frac{2}{3}\mathcal{L}(e^{2t}\sin 3t)\right)$

$g(t) = \frac{1}{13}\left(1 - e^{2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{2t}\sin 3t\right)u(t)$

Ou, si on fait la décomposition en éléments simples:

$p^3 - 4p^2 + 13p = p(p^2-4p+13) = 0 \Longrightarrow p = 0,\ 2+3j$ et $2-3j$

$\Longrightarrow H(p) = \frac{1}{p(p-2-3j)(p-2+3j)} = \frac{1}{13p} - \frac{\frac{1}{26}-\frac{j}{39}}{p-2+3j} - \frac{\frac{1}{26}+\frac{j}{39}}{p-2-3j}$

$= \mathcal{L}\left(\frac{1}{13} - \left(\frac{1}{26} - \frac{1}{39}j\right)\exp(2-3j)t - \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{39}j\right)\exp(2+3j)t\right)$

$= \mathcal{L}\left(\left(\frac{1}{13}\right) - \left(\frac{1}{26} - \frac{1}{39}j\right)(e^{2t}e^{-3jt}) - \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{39}j\right)(e^{2t}e^{3jt})\right)$

$= \mathcal{L}\left(\frac{1}{13} - e^{2t}\left(\frac{e^{-3jt}+e^{3jt}}{26} - j\frac{e^{-3jt}-e^{3jt}}{39}\right)\right)$

$= \frac{1}{13}\mathcal{L}\left(1 - e^{2t}\left(\frac{e^{-3jt}+e^{3jt}}{2} - j\frac{e^{-3jt}-e^{3jt}}{3}\right)\right)$

$$= \frac{1}{13}\mathcal{L}\left(1 - e^{2t}\left((\cos 3t) - \frac{j}{3}(-2j\sin 3t)\right)\right)$$

$$g(t) == \frac{1}{13}\left(1 - e^{2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{2t}\sin 3t\right)u(t)$$

5. $y'' - 4y' + 13y = e(t)$

   $\mathcal{L}(y'' - 4y' + 13y) = E(p)$

   Soit $Y = Y(p) = \mathcal{L}(y)$

   $\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$

   $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - y(0)p - y'(0) = p^2Y$

   L'équation auxiliaire est alos: $p^2Y - 4pY + 13Y = E(p)$

   $Y(p^2 - 4p + 13) = E(p)$

   $$\Longrightarrow Y = \frac{E(p)}{p^2 - 4p + 13} = 3\frac{-1 + e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p} - e^{-4p} + e^{-5p}}{p(p^2 - 4p + 13)}$$

   $Y(p) = 3(-1 + e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p} - e^{-4p} + e^{-5p})H(p)$

   $y(t) = 3(-g(t) + g(t-1) + g(t-2) - g(t-3) - g(t-4) + g(t-5))$

■

Barème

Exercice 1	$5\frac{1}{2}$ **points**		
1)	$f(t)$ paire		1/2
2)	Graphe sur $]-\pi, \pi[$		1
3)	$b_n = 0$		1/2
	$a_0 = 0$		1/2
	a_n		1
4)	les valeurs de α		1/2
	Exemples		1/2
5)	Somme S_1		1/2
	S_2		1/2

Exercice 2	**4 points**		
1)	Graphe de $f(t)$		1/2
2)	$F(\nu)$		3
3)	$G(\nu)$		1/2

Exercice 3	**5 points**		
1)	Matrice A		1/2
2)	A^2 et A^3		1/2
3)	A^n		1/2
4)	$(f \circ f)V$		1/2
5)	Valeurs propres		1
	Vecteurs propres		1
6)	Système		1

Exercice 4	$5\frac{1}{2}$ **points**		
1)	Graphe de $e(t)$		1/2
2)	$E(p)$		1
3)	$e(t)$ en fonction de u		1/2
	$\mathcal{L}(e)$		1/2
4)	$g(t)$		$1\frac{1}{2}$
5)	Eqt auxiliare		1/2
	$Y(p)$		1/2
	$y(t)$		1/2