Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Analyse et calcul matriciel - MVA101-

Examen Final 2010-2011 Semestre I

Solutions

Exercice 1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = e^{-\lambda|t|}$ où λ est une constante positive.*

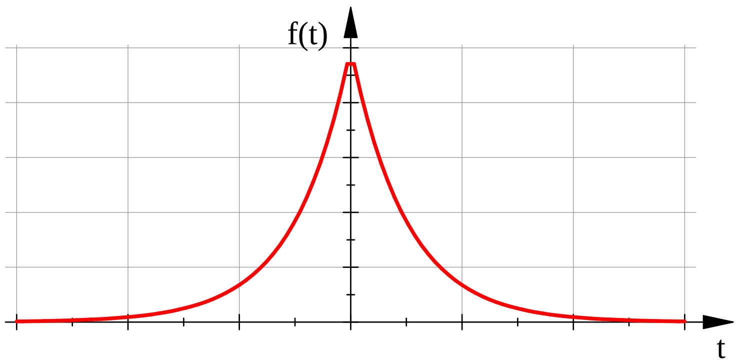
1. Tracer le graphe de $f(t)$
2. Montrer que la transformée de Fourier de $f(t)$ est $F(\nu) = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}$
3. Déduire les transformées de Fourier des fonctions

$$f_1(t) = (t-a)\, e^{-|t-a|} \quad \text{et} \quad f_2(t) = e^{-2|t|}\cos 4\pi t$$

a est une constante positive.

Solution 1 (25 *points*)

1. Graphe: $\boxed{\text{5 points}}$



2. $F(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left(e^{\lambda t}\right) e^{-2j\pi\nu t}dt + \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda t}\right) e^{-2j\pi\nu t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda-2j\pi\nu)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda+2j\pi\nu)t}dt$

$$= \left.\frac{e^{(\lambda-2j\pi\nu)t}}{\lambda-2j\pi\nu}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(\lambda+2j\pi\nu)t}}{\lambda+2j\pi\nu}\right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\lambda-2j\pi\nu} + \frac{1}{\lambda+2j\pi\nu} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2\nu^2} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

3. Soit $g(t) = te^{-\lambda|t|}$

$$\Longrightarrow G(\nu) = -\frac{1}{2j\pi}\frac{dF}{d\nu} = -\frac{1}{2j\pi}\frac{d}{d\nu}\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}\right) = -j\frac{8\lambda\pi\nu}{\left(\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2\right)^2} \boxed{\text{5 points}}$$

théorème de translation : $f_1(t) = g(t-a)$

$$\Longrightarrow F_1(\nu) = G(\nu) = -j\frac{8\lambda\pi\nu \exp(-2j\pi\nu a)}{\left(\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2\right)^2} \boxed{\text{5 points}}$$

théorème de modulation :$\mathcal{F}(f(t)\cos 2\pi at) = \dfrac{F(\nu+a) + F(\nu-a)}{2}$

$$\lambda = 2 \Longrightarrow F(\nu) = \frac{4}{4 + 4\pi^2\nu^2} = \frac{1}{1+\pi^2\nu^2}$$

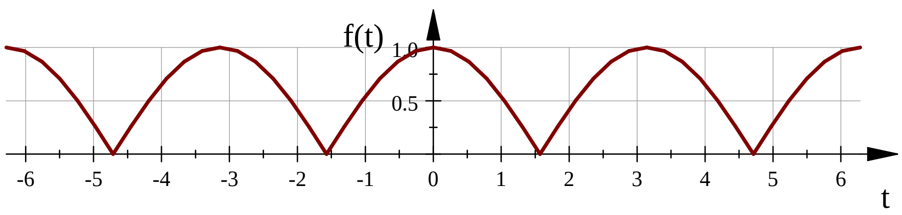
$$a = 2 \Longrightarrow F_2(\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\pi^2(\nu+2)^2} + \frac{1}{1+\pi^2(\nu-2)^2}\right) \boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 2 *Soit la fonction* $g(t)$: $\pi-$ *périodique définie sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *par* $g(t) = |\cos t|$

1. Tracer le graphe de $g(t)$ sur $[-2\pi, 2\pi]$
2. Montrer que la série de Fourier associée s'exprime $S(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cos 2nt}{1-4n^2}$
3. Déduire les sommes : $A = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ et $B = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1-4n^2}$

Solution 2 (25 *points*)

1. Graphe $\boxed{\text{5 points}}$



2. $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t|\, dt = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t dt = \dfrac{2}{\pi} \boxed{2\tfrac{1}{2} \text{ points}}$

   Fonction paire$\Longrightarrow b_n = 0$ $\boxed{2\tfrac{1}{2} \text{ points}}$

   $T = \pi \longrightarrow \omega = 2$ $\boxed{\text{1 points}}$

   $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cos 2nt dt = \dfrac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t \cos 2nt dt \boxed{\text{1 points}}$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\cos\left(1+2n\right)t + \cos\left(1-2n\right)t\right) dt \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(1+2n\right)t}{1+2n} + \frac{\sin\left(1-2n\right)t}{1-2n}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \quad \boxed{2 \text{ point}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{1+2n} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)}{1-2n}\right) \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\left(-1\right)^n}{1+2n} + \frac{\left(-1\right)^n}{1-2n}\right) = \frac{4\left(-1\right)^n}{\pi\left(4n^2-1\right)} \quad \boxed{1 \text{ point}}$$

$$S\left(t\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\left(-1\right)^n \cos 2nt}{\left(1-4n^2\right)} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

3. $t = 0 : f\left(0\right) = S\left(0\right) \Longrightarrow 1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{\left(-1\right)^n}{\left(1-4n^2\right)}$

   $$\sum_{n\geq 1} \frac{\left(-1\right)^n}{\left(1-4n^2\right)} = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \boxed{2\tfrac{1}{2} \text{ points}}$$

   $t = \frac{\pi}{2} : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow 0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\left(1-4n^2\right)}$

   $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\left(1-4n^2\right)} = -\frac{1}{2} \quad \boxed{2\tfrac{1}{2} \text{ points}}$$

Exercice 3 *Soit* $h\left(t\right) = t\sin\omega t$ *avec* $\omega \in \mathbb{R}$

1. Montrer que $h''\left(t\right) + \omega^2 h\left(t\right) = 2\omega\cos\omega t$
2. Déterminer par deux méthodes différentes la transformée de Laplace de $h\left(t\right)$.

Solution 3 (10 *points*)

1. $h'\left(t\right) = \sin\omega t + \omega t\cos\omega t$

   $h''\left(t\right) = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 t\sin\omega t = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 h\left(t\right)$

   $\Longrightarrow h''\left(t\right) + \omega^2 h\left(t\right) = 2\omega\cos\omega t \quad \boxed{3 \text{ points}}$

2. $\mathcal{L}\left(h\right) = H\left(p\right)$, $h\left(0\right) = 0$

   (a) $\mathcal{L}\left(h''\right) = p^2 H$, $\mathcal{L}\left(\cos\omega t\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$

   $h''\left(t\right) + \omega^2 h\left(t\right) = 2\omega\cos\omega t$

   $\Longrightarrow p^2 H + \omega^2 H = \frac{2\omega p}{p^2+\omega^2} \Longrightarrow H\left(p\right) = \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \quad \boxed{4 \text{ points}}$

(b) $\mathcal{L}(\sin\omega t) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}(t\sin\omega t) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2} \ \boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 4 *Soit* $F(p) = \dfrac{2}{p^5 - 2p^4 - 3p^3}$ *la transformée de Laplace d'une fonction causale* $f(t)$.

1. Montrer que $F(p)$ s'exprime sous la forme $F(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p^2} + \dfrac{C}{p^3} + \dfrac{D}{(p+1)} + \dfrac{E}{(p-3)}$ où A, B, C, D et E des constantes à déterminer.
2. Déterminer alors $f(t)$
3. Déduire la solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = t^2$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Solution 4 (15 *points*)

1. $F(p) = \dfrac{2}{p^5 - 2p^4 - 3p^3} = -\dfrac{14}{27p} + \dfrac{4}{9p^2} - \dfrac{2}{3p^3} + \dfrac{1}{2(p+1)} + \dfrac{1}{54(p-3)}$ $\boxed{\text{5 points}}$
2. $f(t) = \left(-\dfrac{14}{27} + \dfrac{4}{9}t - \dfrac{1}{3}t^2 + \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{54}e^{3t}\right) u(t)$ $\boxed{\text{5 points}}$
3. Soit $Y(p) = \mathcal{L}(y) \Longrightarrow \mathcal{L}(y') = pY \quad \text{et } \mathcal{L}(y'') = p^2 Y$

   $y'' - 2y' - 3y = t^2 \longrightarrow (p^2 - 2p + 3)\,Y = \dfrac{2}{p^3}$

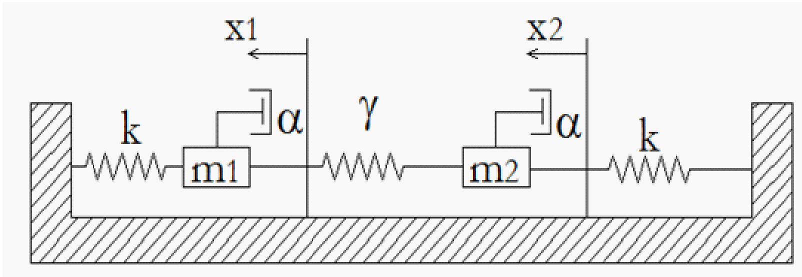
   $\Longrightarrow Y = \dfrac{2}{p^3(p^2 - 2p + 3)} = F(p)$ $\boxed{\text{5 points}}$

   $y(t) = f(t) = \left(-\dfrac{14}{27} + \dfrac{4}{9}t - \dfrac{1}{3}t^2 + \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{54}e^{3t}\right) u(t)$

Exercice 5 *Soit* A *la matrice carrée suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'exprime $P(X) = (X+1)^2(X^2 + 2X + 5)$
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
3. Un dispositif mécanique est composé par un système de Masses-Ressorts-Amortisseurs comme représenté sur la figure ci-dessous. Les masses m_1 et m_2 étant assujetties à se mouvoir horizontalement en vibration libre.



Ce système, dit système à deux degrés de liberté, nécessite la connaissance des deux abscisses indépendantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ vérifiant les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -kx_1 - \gamma(x_1 - x_2) - \alpha x_1' \\ m_2 x_2'' &= -kx_2 - \gamma(x_2 - x_1) - \alpha x_2' \end{aligned} \qquad (S)$$

On donne: $m_1 = m_2 = 1, k = 1$, $\gamma = 2$ et $\alpha = 2$

On pose $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ $x_1' = y_3$, $x_2' = y_4$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}$

(a) Montrer que le système (S) s'écrit sous la forme :$Y' = AY$

(b) Utiliser les résultats précédents pour déduire la solution du système. On écrira x_i sous la forme de $x_i = (A_i + B_i t + C_i \cos\omega t + D_i \sin\omega t)\, e^{-t}$ $(i = 1, 2)$

Solution 5 (25 *points*)

1. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

   $= \lambda^4 + 4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 12\lambda + 5 = \left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right)(\lambda + 1)^2$ $\boxed{\text{5 points}}$

2. Les valeurs propres sont les racines de $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right)(\lambda + 1)^2 = 0$

   $$\left.\begin{array}{l} (\lambda+1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \qquad \text{(racine double)} \\ \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda+1)^2 = -4 = 4j^2 \Longrightarrow \lambda_{3,4} = -1 \pm 2j \end{array}\right\} \boxed{\text{2 points}}$$

   Les vecteurs propres sont v_i tels que $Av_i = \lambda_i v_i$

   $\lambda_{1,2} = -1 \leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\lambda_3 = -1 - 2j \leftrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\lambda_4 = -1+2j \leftrightarrow v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}+\frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3. $m_1 = m_2 = 1, k = 1$, $\gamma = 2$ et $\alpha = 2$ donc le système s'écrit:

$$\left.\begin{array}{r} x_1'' = -x_1 - 2(x_1 - x_2) - 2x_1' \\ x_2'' = -x_2 - 2(x_2 - x_1) - 2x_2' \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1'' = -3x_1 + 2x_2 - 2x_1' \\ x_2'' = 2x_1 - 3x_2 - 2x_2' \end{array}\right\} \boxed{\text{2 points}}$$

$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$

$x_1' = y_3 \Longrightarrow y_1' = x_1' = y_3$ et $x_1'' = y_3'$, $x_2' = y_4 \Longrightarrow x_2'' = y_4'$et $y_2' = x_2' = y_4$

$x_1'' = -3x_1 + 2x_2 - 2x_1' \Longrightarrow y_3' = -3y_1 + 2y_2 - 2y_3$

$x_2'' = 2x_1 - 3x_2 - 2x_2' \Longrightarrow y_4' = 2y_1 - 3y_2 - 2y_4$

$\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_4' = 2y_1 - 3y_2 - 2y_4 \end{array}\right. \quad \boxed{\text{5 points}}$$

(a) On a donc : $Y' = AY$

(b) La solution du système est de la forme : $Y = \sum_{i=1}^{4} C_i V_i e^{\lambda_i t}$

Soit $Y = (A+Bt)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C\begin{pmatrix} \frac{1}{5}-\frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-2j)t} + D\begin{pmatrix} \frac{1}{5}+\frac{2}{5}j \\ -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}j \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+2j)t}$

Finalement :

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = (-A - Bt + C_1\cos 2t + D_1 \sin 2t)\, e^{-t} \\ x_2(t) = (-A - Bt + C_2\cos 2t + D_2 \sin 2t)\, e^{-t} \end{array}\right\} \boxed{\text{5 points}}$$

En effet pour x_1 : C et D sont deux complexes conjugués

$C\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\right) e^{-2jt} + D\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\right) e^{2jt}$

$= \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\right) C(\cos 2t - j\sin 2t) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\right) D(\cos 2t + j\sin 2t)$

$= \dfrac{C + D - 2j(C - D)}{5}\cos 2t - \dfrac{2(C+D) + j(C-D)}{5}\sin 2t = C_1\cos 2t + D_1 \sin 2t$