Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Analyse et calcul matriciel - MVA101 -

Examen Final 2011-2012 Semestre I

Solutions+Barèmes

Exercice 1 (25 points) *Soit la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* A^2*et* A^3. *Déduire* A^n *en fonction* A $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\boxed{\text{7 points}}$
2. *Calculer la matrice* $\exp(At)$, *où* t *est une variable réelle.* $\boxed{\text{10 points}}$
3. *Déduire la solution du système différentiel* $\boxed{\text{8 points}}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y + 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 8z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y + 3z \end{cases}$$

Solution 1 *:*

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -A$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

   $A^3 = A^2A = -A \times A = -A^2 = +A \Longrightarrow A^4 = -A \cdots$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

$$A^n = -(-1)^n A \quad \boxed{\textbf{3 points}}$$

2. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n = I - A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-t)^n = I - A \left(-t + \frac{1}{2} t^2 + \cdots \right)$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

   On a : $1 - e^{-t} = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

   Alors

   $\exp(At) = I + A\left(1 - e^{-t}\right)$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

   $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \left(1 - e^{-t}\right)$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

Soit

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} 1 & 2-2e^{-t} & 4-4e^{-t} \\ -2+2e^{-t} & -4+5e^{-t} & -8+8e^{-t} \\ 1-e^{-t} & 2-2e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix} \quad \boxed{\textbf{2 points}}$$

3. Le système est de la forme : $X' = AX$ donc la solution est : $X = (\exp(At))\,V$ où V est un vecteur constant:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-2e^{-t} & 4-4e^{-t} \\ -2+2e^{-t} & -4+5e^{-t} & -8+8e^{-t} \\ 1-e^{-t} & 2-2e^{-t} & 4-3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad \boxed{\textbf{2 points}}$$

$$= \begin{pmatrix} A+2B+4C-2Be^{-t}-4Ce^{-t} \\ 2Ae^{-t}-4B-8C-2A+5Be^{-t}+8Ce^{-t} \\ A+2B+4C-Ae^{-t}-2Be^{-t}-3Ce^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A+2B+4C-(2B+4C)\,e^{-t} \\ -4B-8C-2A+(2A+5B+8C)\,e^{-t} \\ A+2B+4C-(A+2B+3C)\,e^{-t} \end{pmatrix} \quad \boxed{\textbf{4 points}}$$

Soit:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} \\ y(t) = -2C_1 - \left(\frac{1}{2}C_2 + 2C_3\right) e^{-t} \\ z(t) = C_1 + C_3 e^{-t} \end{cases} \quad \boxed{\textbf{2 points}}$$

Remarque 1 *La solution peut s'exprimer en terme de* $\cosh t$ *et* $\sinh t$:

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

$$= I - A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-t)^n$$

$$= I - A\left(-t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{6!}t^6 + \cdots\right)$$

$$= I + A\left(\left(t + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{6!}t^6 + \cdots\right)\right)$$

$$= I + A(\sinh t - (\cosh t - 1)) = I + A(\sinh t - \cosh t + 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (\sinh t - \cosh t + 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2\sinh t - 2\cosh t + 2 & 4\sinh t - 4\cosh t + 4 \\ 2\cosh t - 2\sinh t - 2 & 5\cosh t - 5\sinh t - 4 & 8\cosh t - 8\sinh t - 8 \\ \sinh t - \cosh t + 1 & 2\sinh t - 2\cosh t + 2 & 3\sinh t - 3\cosh t + 4 \end{pmatrix}$$

Remarque 2 *on a* $\sinh t - \cosh t + 1 = 1 - e^{-t}$ *donc on aura la même résultat*

Exercice 2 (35 points) *On considère la fonction $2\pi-$périodique définie sur $]-\pi,\pi[$ par:*

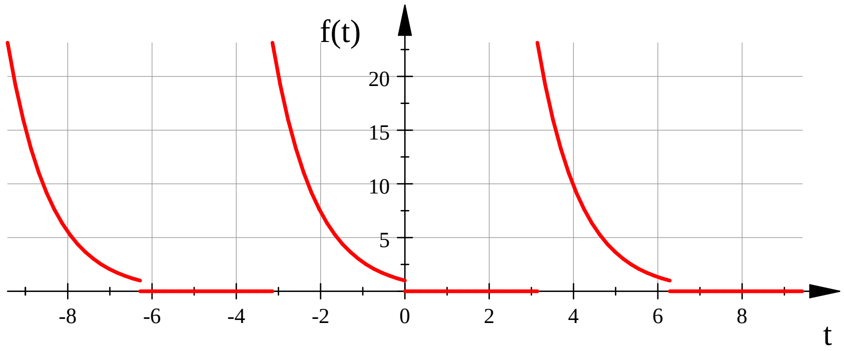
$$f(t)=\begin{cases} e^{-t} & si \quad -\pi<t<0 \\ 0 & si \quad 0<t<\pi \end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de $f(t)$ sur l'intervalle $]-3\pi,3\pi[$* $\boxed{\text{5 points}}$
2. *Calculer les coefficients complexes de Fourier associés à $f(t)$.* $\boxed{\text{6 points}}$
3. *En déduire $S(t)$ la série réelle de Fourier associée à $f(t)$.* $\boxed{\text{8 points}}$
4. *Calculer ℓ_0 et ℓ_π les valeurs vers lesquelles se converge la série aux points $t=0$ et $t=\pi$ respectivement.* $\boxed{\text{4 points}}$
5. *En écrivant $\ell_0=S(0)$ et $\ell_\pi=S(\pi)$ déduire les sommes:* $\boxed{\text{12 points}}$

$$S_1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} \quad \text{et} \quad S_2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

Solution 2 :

1. *Graphe* $\boxed{\textbf{5 points}}$



2. $T=2\pi\Longrightarrow\omega=1$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(t)\exp(-jn\omega t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}e^{-t}e^{-jnt}dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1-jn}{n^2+1}\left((-1)^n e^{\pi}-1\right) \quad \boxed{\textbf{6 points}}$$

3. $a_0=C_0=\dfrac{e^{\pi}-1}{2\pi}$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

$a_n=2\,\mathrm{Re}(C_n)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

$b_n=-2\,\mathrm{Im}(C_n)=\dfrac{n}{\pi}\dfrac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

La série réelle est :

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}-1)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left((-1)^n e^{\pi}-1\right)(\cos nt+n\sin nt)}{1+n^2} \quad \boxed{\textbf{2 points}}$$

4. La fonction $f(t)$ admet des discontinuités de 1ere espece en $t=0$ et $t=\pi$alors:
$$\ell_0 = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \boxed{\textbf{2 points}}$$
$$\ell_\pi = \frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{e^\pi}{2} \boxed{\textbf{2 points}}$$

5. $S(0) = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n e^\pi - 1)}{1+n^2} = \ell_0 = \frac{1}{2} \boxed{\textbf{1 point}}$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n e^\pi - 1)}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(e^\pi - 1) \boxed{\textbf{1 point}}$$
$$\Longleftrightarrow e^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(e^\pi - 1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-S_1 + e^\pi S_2 = \frac{1}{2}(\pi - e^\pi + 1) \quad \boxed{\textbf{1 point}} \tag{E$_1$}$$

$$S(\pi) = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n e^\pi - 1)(-1)^n}{1+n^2} = \ell_\pi = \frac{e^\pi}{2} \boxed{\textbf{1 point}}$$
$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n e^\pi - 1)(-1)^n}{1+n^2} = \pi\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}(e^\pi - 1) \boxed{\textbf{1 point}}$$
$$\Longrightarrow e^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \pi\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}(e^\pi - 1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$e^\pi S_1 - S_2 = \pi\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}(e^\pi - 1) \quad \boxed{\textbf{1 point}} \tag{E$_2$}$$

Multiplions E_2 par $e^{-\pi}$,on obtient:
$$S_1 - e^{-\pi} S_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\pi}\right) \boxed{\textbf{1 point}} \tag{E'$_2$}$$

La somme $E_1 + E_2'$ nous donne :
$$\begin{aligned} \left(e^\pi - e^{-\pi}\right) S_2 &= \pi - \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} \\ &\Longrightarrow S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right) \boxed{\textbf{2 points}} \end{aligned}$$

Multiplions E_1 par $e^{-\pi}$,on obtient:
$$-e^{-\pi} S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\left(\pi e^{-\pi} - 1 + e^{-\pi}\right) \boxed{\textbf{1 point}} \tag{E'$_1$}$$

La somme $E_1' + E_2$ nous donne:
$$\begin{aligned} \left(e^\pi - e^{-\pi}\right) S_1 &= \frac{1}{2}\left(\pi\left(e^\pi + e^{-\pi}\right) + e^{-\pi} - e^\pi\right) \\ &\Longrightarrow S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh \pi} - 1\right) \boxed{\textbf{2 points}} \end{aligned}$$

Exercice 3 (40 points) *Soit la fonction:*

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & si \quad 1 \le t \le 2 \\ 3-t & si \quad 2 \le t \le 3 \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de* $f(t)$ *.* $\boxed{\text{3 points}}$
2. *Calculer la transformée de Laplace de* $f(t)$ *.* $\boxed{\text{10 points}}$
3. *Trouver sans faire de calcul intégral la transformée de Fourier de* $f(t)$ *.* $\boxed{\text{7 points}}$
4. *On désigne par* $g_\alpha(t)$ *la fonction causale définie par sa transformée de Laplace :*

$$G_\alpha(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p^4 - 2p^3 + 5p^2}$$

Déterminer la fonction $g_\alpha(t)$ *.* $\boxed{\text{10 points}}$

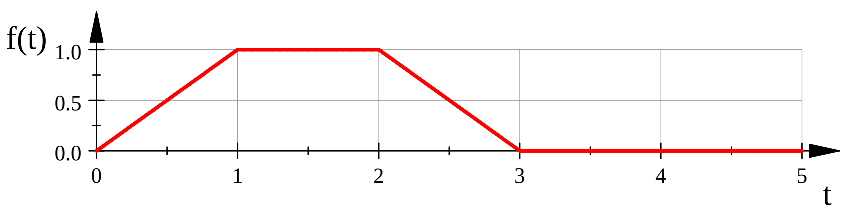
5. *En utilisant les résultats précédentes résoudre l'équation différentielle:* $\boxed{\text{10 points}}$

$$y'' - 2y' + 5y = f(t)$$

où $y = y(t)$ *vérifiant les conditions* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 0$

Solution 3 *:*

1. Graphe de $f(t)$: $\boxed{\textbf{3 points}}$



2. $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt = \int_0^1 te^{-pt} dt + \int_1^2 e^{-pt} dt + \int_2^3 (3-t)\, e^{-pt} dt$ $\boxed{\textbf{2 points}}$

- $I_1 = \int_0^1 te^{-pt} dt$

Par parties: $\begin{cases} u = t & \rightarrow & du = dt \\ dv = e^{-pt} dt & \rightarrow & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{cases}$ $\boxed{\textbf{1 point}}$

$$I_1 = -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^1 \quad \boxed{\textbf{1 point}}$$

$$= -\frac{1}{p} e^{-p} - \frac{1}{p^2} e^{-p} + \frac{1}{p^2} \quad \boxed{\textbf{1 point}}$$

- $I_2 = \int_1^2 e^{-pt}dt = -\left.\frac{1}{p}e^{-pt}\right|_1^2 = -\frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-p}$ **1 point**

- $I_3 = \int_2^3 (3-t)\, e^{-pt}dt$

  Par parties: $\begin{cases} u = 3-t & \rightarrow & du = -dt \\ dv = e^{-pt}dt & \rightarrow & v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$ **1 point**

  $I_3 = -\left.\frac{3-t}{p}e^{-pt}\right|_2^3 - \frac{1}{p}\int_2^3 e^{-pt}dt = \frac{1}{p}e^{-2p} + \left.\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right|_2^3$ **1 point**

  $= \frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p}$ **1 point**

$F(p) = I_1 + I_2 + I_3$

$= \left(-\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}\right) + \left(-\frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-p}\right) + \left(\frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p}\right)$

Soit Finalement:

$$F(p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1\right) \quad \boxed{\textbf{1 point}}$$

3. Il suffit de remplacer p par $(2j\pi\nu)$

   $p = 2j\pi\nu$ **1 point**

   $\Longrightarrow F(2j\pi\nu) = \frac{1}{(2j\pi\nu)^2}\left(e^{-3(2j\pi\nu)} - e^{-2(2j\pi\nu)} - e^{-2j\pi\nu} + 1\right)$ **3 points**

   alors:

   $$\mathcal{F}(f) = -\frac{1}{4\pi^2\nu^2}\left(e^{-6j\pi\nu} - e^{-4j\pi\nu} - e^{-2j\pi\nu} + 1\right) \quad \boxed{\textbf{3 points}}$$

4. $G_\alpha(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p^4 - 2p^3 + 5p^2}$

   $G_0(p) = \frac{1}{p^4 - 2p^3 + 5p^2} = \frac{1}{(p^2 - 2p + 5)\, p^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 - 2p + 5}$ **1 point**

   $$= \frac{(A+C)\,p^3 + (-2A + B + D)\,p^2 + (5A - 2B)\,p + 5B}{p^2\,(p^2 - 2p + 5)}$$

   Par identification on trouve :

   $$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B + D = 0 \\ 5A - 2B = 0 \\ 5B = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C = -A \\ D = 2A - B \\ A = \frac{2}{5}B \\ 5B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{5} & \boxed{\textbf{1 point}} \\ A = \frac{2}{25} & \boxed{\textbf{1 point}} \\ C = -\frac{2}{25} & \boxed{\textbf{1 point}} \\ D = -\frac{1}{25} & \boxed{\textbf{1 point}} \end{cases}$$

Soit: $G_0(p) = \frac{1}{25}\left(\frac{2}{p} + \frac{5}{p^2} - \frac{2p+1}{p^2-2p+5}\right)$ **1 point**

On a :

- $\frac{1}{p} = \mathcal{L}(u(t))$ $\quad$ $u(t)$ est la fonction échelon unité
- $\frac{1}{p^2} = \mathcal{L}(tu(t))$
- $\frac{2p+1}{p^2-2p+5} = \frac{2p+1}{(p-1)^2+4} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+4} + \frac{3}{2}\frac{2}{(p-1)^2+4}$ **1 point**

$$= 2\mathcal{L}\left(\left(e^t \cos 2t\right) u(t)\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}\left(\left(e^t \sin 2t\right) u(t)\right)$$ **1 point**

D'où:

$$g_0(t) = \frac{1}{25}\left(2 + 5t - \frac{1}{2}e^t\left(4\cos 2t + 3\sin 2t\right)\right) u(t)$$ **1 point**

$G_\alpha(p) = e^{-\alpha p} G_0(p) \Longrightarrow g_\alpha(t) = g_0(t-\alpha)$ **1 point**

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{25}\left(2 + 5(t-\alpha) - \frac{1}{2}e^{t-\alpha}\left(4\cos 2(t-\alpha) + 3\sin 2(t-\alpha)\right)\right) u(t-\alpha)$$

5. $y'' - 2y' + 5y = f(t)$

   $\mathcal{L}(y'' - 2y' + 5y) = \mathcal{L}(f) \Longleftrightarrow \mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) = F(p)$ **2 points**

   Soit $Y = Y(p) = \mathcal{L}(y)$

   $\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$ **1 point**

   $\mathcal{L}(y'') = p^2 Y - py(0) - y'(0) = p^2 Y$ **1 point**

   L'équation image est:

   $(p^2 - 2p + 5) Y = \frac{1}{p^2}\left(e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1\right) \Longrightarrow$ **1 point**

   $$Y(p) = \frac{e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1}{p^2(p^2 - 2p + 5)}$$ **3 points**

   On remarque que $Y(p) = G_3(p) - G_2(p) - G_1(p) + G_0(p)$ **1 point**

   donc :

   $$y(t) = g_3(t) - g_2(t) - g_1(t) + g_0(t)$$ **1 point**