Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Analyse et calcul matriciel - MVA101-

Examen Final 2012-2013 Lundi 18/2/2013 **Durée : 3: 00 h**

Solutions et Barèmes

Exercice 1 *On désigne par u_a la fonction échelon unité définie par:*

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 1 & si \quad t > a \\ 0 & si \quad t < a \end{cases}$$

où a est un réel positif.

On définit la fonction causale $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 \\ -t+2 & si \quad 1 < t < 2 \\ t-2 & si \quad 2 < t < 3 \\ 1 & si \quad t > 3 \end{cases}$$

1. Donner les transformées de Laplace des fonctions : $u_0(t), u_a(t), tu_a(t)$ et de $(t-a)u_a(t)$.
2. Tracer la courbe représentative de $f(t)$.
3. Exprimer $f(t)$ à l'aide de la fonction échelon unité.
4. Calculer $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, la transformée de Laplace de $f(t)$.
5. On considère la fonction :
$$H(p) = \frac{36}{p^4 + 2p^3 - 3p^2}$$
Décomposer $H(p)$ en fractions simples et déduire la fonction temporelle $h(t)$ telle que $H(p) = \mathcal{L}(h(t))$
6. En utilisant la transformée de Laplace, déduire la solution de l'équation différentielle :
$$y'' + 2y' - 3y = f(t)$$
où $y(t)$ est une fonction causale vérifie les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Solution 1 *:*

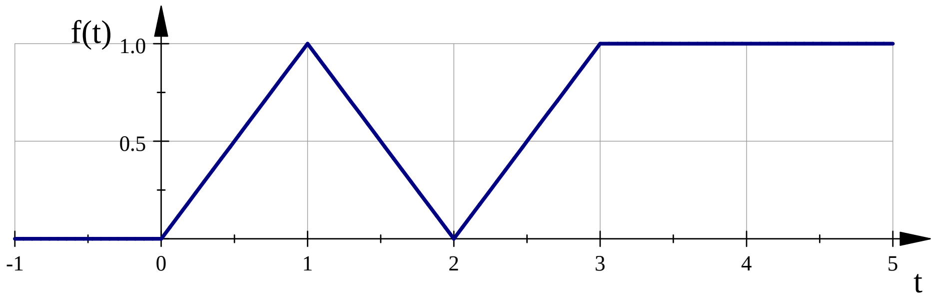
1. $\mathcal{L}(u_0) = \frac{1}{p}$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

$\mathcal{L}(u_a) = \frac{e^{-ap}}{p}$ $\boxed{\frac{1}{2}\text{ point}}$

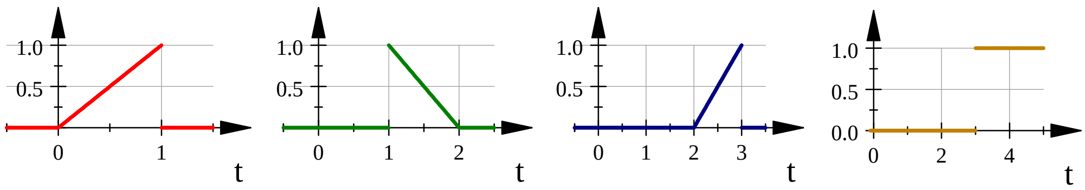
$$\mathcal{L}(tu_a) = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}(u_a)) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{-ap}}{p}\right) = \frac{e^{-ap}}{p^2} + \frac{ae^{-ap}}{p} \quad \boxed{1\text{ point}}$$

$$\mathcal{L}((t-a)u_a) = \mathcal{L}(tu_a) - \mathcal{L}(au_a)$$
$$= \frac{e^{-ap}}{p^2} + \frac{ae^{-ap}}{p} - a\frac{e^{-ap}}{p} = \frac{e^{-ap}}{p^2} \quad \boxed{1\text{ point}}$$

2. Graphe : $\boxed{\text{3 points}}$

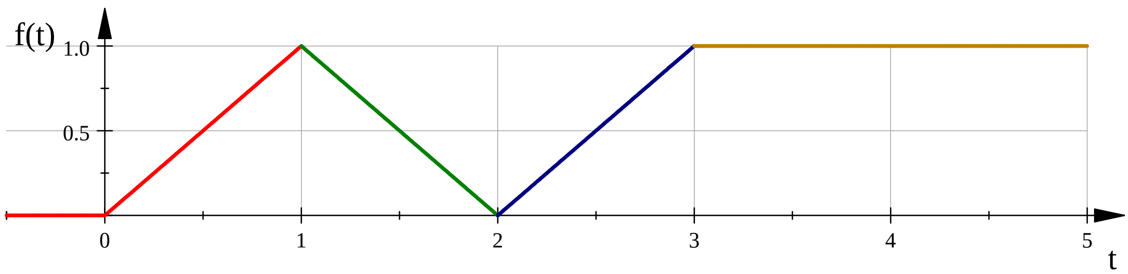


3. Pour déterminer une expression simple de $f(t)$ en fonction de $u_a(t)$ on peut utiliser la définition ou le graphe de $f(t)$.



$t(u_0 - u_1)$ $\quad$ $(-t+2)(u_1 - u_2)$ $\quad$ $(t-2)(u_2 - u_3)$ $\quad$ u_3

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$



ou d'après la définition:

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 \longrightarrow & t(u_0 - u_1) \\ -t+2 & si \quad 1 < t < 2 \longrightarrow & (-t+2)(u_1 - u_2) \\ t-2 & si \quad 2 < t < 3 \longrightarrow & (t-2)(u_2 - u_3) \\ 1 & si \quad t > 3 \longrightarrow & u_3 \end{cases} \quad \boxed{1{\times}4 = 4 \text{ points}}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t(u_0 - u_1) + (-t+2)(u_1 - u_2) + (t-2)(u_2 - u_3) + u_3 \\ &= tu_0 + (-t - t + 2)u_1 + (t - 2 + t - 2)u_2 + (-t + 2 + 1)u_3 \\ &= tu_0 - 2(t-1)u_1 + 2(t-2)u_2 - (t-3)u_3 \end{aligned}$$

$$f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) \boxed{\text{1 point}}$$

4. On remarque immediatement que $f(t)$ est de la forme:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k (t-k)\, u(t-k)$$

telle que $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

La transformation de Laplace est linéaire et on a : $\mathcal{L}((t-a)\, u_a) = \dfrac{e^{-ap}}{p^2}$

Donc:

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} + 2\frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{e^{-3p}}{p^2} = \frac{1 - 2e^{-p} + 2e^{-2p} - e^{-3p}}{p^2} \boxed{\text{5 points}}$$

5. $H(p) = \dfrac{36}{p^2(p^2+2p-3)}$

Le trinôme $p^2 + 2p - 3 = 0$ a 2 racines réelles : $p = 1, -3$ donc $p^2 + 2p - 3 = (p-1)(p+3)$

$H(p)$ s'écrit :

$H(p) = \dfrac{36}{p^2(p-1)(p+3)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p^2} + \dfrac{C}{p-1} + \dfrac{D}{p+3} \boxed{\text{1 point}}$

$= \dfrac{(A+C+D)\,p^3 + (B+2A+3C-D)\,p^2 + (-3A+2B)\,p - 3B}{p^2(p^2+2p-3)}$

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ B + 2A + 3C - D = 0 \\ -3A + 2B = 0 \\ -3B = 36 \end{cases} \Longrightarrow [A = -8, B = -12, C = 9, D = -1] \quad \boxed{1{\times}4 = 4 \text{ points}}$$

Ou autrement :

$$H \times p^2\big|_{p=0} \rightarrow \quad \left.\frac{36}{p^2(p+3)}\right|_{p=0} = \left. Ap + B + \frac{Cp^2}{p-1} + \frac{Dp^2}{p+3}\right|_{p=0} \Longrightarrow B = -12$$

$$H \times (p-1)\big|_{p=1} \rightarrow \quad \left.\frac{36}{p^2(p+3)}\right|_{p=1} = \left.\frac{A(p-1)}{p} + \frac{B(p-1)}{p^2} + C + \frac{D(p-1)}{p+3}\right|_{p=1} \Longrightarrow C = 9$$

$$H \times (p+3)\big|_{p=-3} \rightarrow \quad \left.\frac{36}{p^2(p-1)}\right|_{p=-3} = \left.\frac{A(p+3)}{p} + \frac{B(p+3)}{p^2} + \frac{C(p+3)}{p-1} + D\right|_{p=-3} \Longrightarrow D = -1$$

$$\left.\frac{36}{p^2(p-1)(p+3)}\right|_{p=2} = \left.\frac{A}{p} - \frac{12}{p^2} + \frac{9}{p-1} - \frac{1}{p+3}\right|_{p=2} \Leftrightarrow \frac{9}{5} = \frac{1}{2}A + \frac{29}{5} \Longrightarrow A = -8$$

$$H(p) = \frac{36}{p^2(p-1)(p+3)} = -\frac{8}{p} - \frac{12}{p^2} + \frac{9}{p-1} - \frac{1}{p+3} \boxed{\text{1 point}}$$

$\dfrac{1}{p} = \mathcal{L}(1) \qquad \dfrac{1}{p^2} = \mathcal{L}(t)$

$\dfrac{1}{p-1} = \mathcal{L}(e^t) \qquad \dfrac{1}{p+3} = \mathcal{L}(e^{-3t})$

Alors :

$$h(t) = \left(-8 - 12t + 9e^t - e^{-3t}\right) u_0(t) \boxed{\text{4 points}}$$

6. $y'' + 2y' - 3y = f(t)$

L'équation image: $\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\mathcal{L}(y) = Y(p) \qquad \mathcal{L}(y') = pY(p)$

$\mathcal{L}(y'') = p^2 Y(p) \qquad \mathcal{L}(f) = F(p)$

Donc :

$p^2 Y + 2pY - 3Y = F \Longrightarrow \left(p^2 + 2p - 3\right) Y = F$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$Y(p) = \frac{F}{p^2 + 2p - 3} = \frac{1 - 2e^{-p} + 2e^{-2p} - e^{-3p}}{p^2\left(p^2 + 2p - 3\right)}$$

$$= \frac{1}{p^2\left(p^2 + 2p - 3\right)} - 2\frac{e^{-p}}{p^2\left(p^2 + 2p - 3\right)} + 2\frac{e^{-2p}}{p^2\left(p^2 + 2p - 3\right)} - \frac{e^{-3p}}{p^2\left(p^2 + 2p - 3\right)} \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{36}\left(H(p) - 2e^{-p}H(p) + 2e^{-2p}H(p) - e^{-3p}H(p)\right) \boxed{\text{2 points}}$$

On obtient :

$$y(t) = \frac{1}{36}\left(h(t) - 2h(t-1) + 2h(t-2) - h(t-3)\right) \boxed{\text{4 points}}$$

Exercice 2 *On considère la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$.
2. Calculer $\exp(At)$ où t est un réel.
3. Déduire la solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - 2z \end{cases}$$

Solution 2 *:*

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3A$ $\boxed{\text{2 points}}$

$A^3 = A^2 A = -3A^2 = (-3)^2 A$ $\boxed{\text{1 point}}$

$A^4 = (-3A)^2 = (-3)^2 A^2 = (-3)^3 A$

Soit

$$A^n = (-3)^{n-1} A \quad \boxed{\text{2 points}}$$

En effet : si $A^n = (-3)^{n-1} A \Longrightarrow A^{n+1} = (-3)^{n-1} A^2 = (-3)^{n-1}(-3A) = (-3)^n A$

2. $$\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$= I + At + \frac{1}{2!}(-3)At^2 + \frac{1}{3!}(-3)^2 At^3 + \frac{1}{4!}(-3)^3 At^4 + \cdots \boxed{\text{1 point}}$$

$$= I - \frac{1}{3}\left(-3At + \frac{1}{2!}(-3)^2 At^2 + \frac{1}{3!}(-3)^3 At^3 + \frac{1}{4!}(-3)^4 At^4 + \cdots\right)$$

$$= I - \frac{1}{3}A\left(-3t + \frac{1}{2!}(-3t)^2 + \frac{1}{3!}(-3t)^3 + \frac{1}{4!}(-3t)^4 + \cdots\right) \boxed{\text{2 points}}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\Longrightarrow -3t + \frac{1}{2!}(-3t)^2 + \frac{1}{3!}(-3t)^3 + \frac{1}{4!}(-3t)^4 + \cdots = e^{-3t} - 1$$

$$\exp(At) = I - \frac{1}{3}A\left(e^{-3t} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(3I + A - Ae^{-3t}\right) \boxed{\text{3 points}}$$

$$3I + A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae^{-3t} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{-3t} & -2e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\exp(At) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 1-e^{-3t} \\ 1-e^{-3t} & 1+2e^{-3t} & 1-e^{-3t} \\ 1-e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 1+2e^{-3t} \end{pmatrix} \boxed{\text{3 points}}$$

3. Soit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$, alors le système s'écrit : $\varphi' = A\varphi$ $\boxed{\text{2 points}}$

la solution générale est $\varphi(t) = e^{At}V$ $\boxed{\text{2 points}}$

où V est un vecteur constante : $V = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 1-e^{-3t} \\ 1-e^{-3t} & 1+2e^{-3t} & 1-e^{-3t} \\ 1-e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 1+2e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 + 2C_1e^{-3t} - C_2e^{-3t} - C_3e^{-3t} \\ C_1 + C_2 + C_3 - C_1e^{-3t} + 2C_2e^{-3t} - C_3e^{-3t} \\ C_1 + C_2 + C_3 - C_1e^{-3t} - C_2e^{-3t} + 2C_3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\left(C_1 + C_2 + C_3 + (2C_1 - C_2 - C_3)e^{-3t}\right) \boxed{\text{2 points}} \\ y(t) = \frac{1}{3}\left(C_1 + C_2 + C_3 + (-C_1 + 2C_2 - C_3)e^{-3t}\right) \boxed{\text{2 points}} \\ z(t) = \frac{1}{3}\left(C_1 + C_2 + C_3 + (-C_1 - C_2 + 2C_3)e^{-3t}\right) \boxed{\text{2 points}} \end{cases}$$

ou plus simplement:

$$\begin{cases} x(t) = a + be^{-3t} \\ y(t) = a - (b+c)e^{-3t} \\ z(t) = a + ce^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 3 *On considère la fonction*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2|t|)$$

On désigne par $f(t)$ *la fonction* $\pi-$*périodique telle que*

$$f(t) = \varphi(t) \quad sur \quad]0, \pi[$$

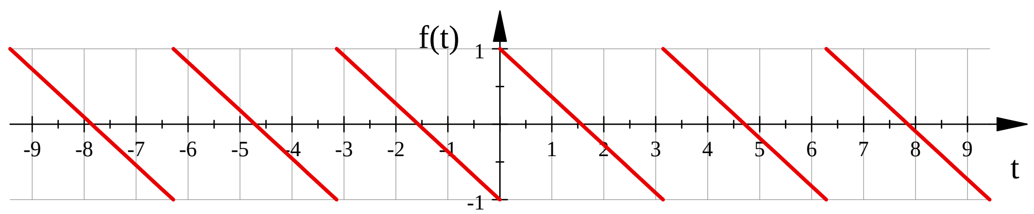
et soit $g(t)$ *la fonction définie par:*

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t) & si \quad t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & si \quad Ailleurs \end{cases}$$

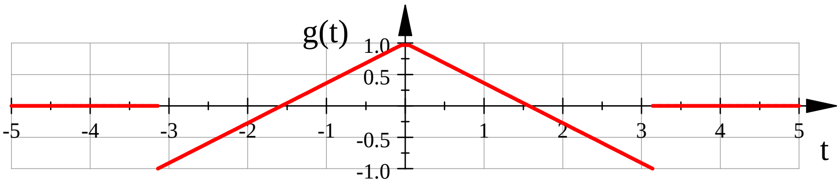
1. Montrer que $f(t)$ est impaire et que $g(t)$ est paire.
2. Tracer le graphe de $f(t)$ sur $]-3\pi, 3\pi[$.
3. Tracer le graphe de $g(t)$.
4. Calculer la série réelle de Fourier associée à $f(t)$.
5. Calculer l'énergie du signal $f(t)$
6. Déduire les sommes:
$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
7. On désigne par $G(\nu)$ la transformée de Fourier de $g(t)$
   (a) Montrer que $G(\nu)$ s'exprime à l'aide de l'intégrale:
   $$G(\nu) = 2\int_0^{\pi} g(t)\cos\omega t dt$$
   où $\omega = 2\pi\nu$.
   (b) Calculer $G(\nu)$.

Solution 3 *:*

1. La fonction $f(t)$ est $\pi-$périodique alors
   $f(-t) = f(-t+\pi) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2(-t+\pi)) = \frac{1}{\pi}(2t - \pi) = -f(t)$ $\boxed{\text{3 points}}$
   donc $f(t)$ est impaire.
   $g(-t) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2|-t|) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2|t|) = g(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$
   $g(t)$ est paire.
2. Graphe de $f(t)$: $\boxed{\text{3 points}}$



3. Graphe de $g(t)$: $\boxed{\text{2 points}}$



4. La série réelle de Fourier de $f(t)$ est de la forme :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$f(t)$ est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t dt$$

La période du signal $f(t)$ est $T = \pi$ donc la fréquence fondamentale est $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - 2t}{\pi} \right) \sin 2nt dt = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} (\pi - 2t) \sin 2nt dt \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Intégration par parties: $\begin{cases} u = \pi - 2t & \Longrightarrow & du = -2dt \\ dv = \sin 2nt dt & \Longrightarrow & v = -\dfrac{1}{2n} \cos 2nt \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$b_n = \frac{2}{\pi^2} \left(- \frac{\pi - 2t}{2n} \cos 2nt \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos 2nt dt \right) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos 2nt dt = \frac{1}{2n^2} \sin 2nt \Big|_0^{\pi} = 0 \quad \boxed{\text{1 points}}$$

$$\Longrightarrow b_n = \frac{2}{\pi^2} \left(- \frac{(\pi - 2\pi) \cos 2n\pi - \pi \cos 0}{2n} \right) = \frac{2}{n\pi} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$S_f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2nt}{n} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

5. $E_f = \displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - 2t}{\pi} \right)^2 dt = \frac{1}{3}\pi$ $\boxed{\text{2 points}}$

6. Au point $t = \dfrac{\pi}{4}$ la fonction $f(t)$ est continue donc $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = S_f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\pi - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{1}{2}$$

$$S_f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 2n(\pi/4)}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{1}{2}\Longrightarrow S_1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{1}{4}\pi \quad \boxed{\text{1 point}}$$

D'après la formule de Parseval: $E=Ta_0^2+\dfrac{T}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

Donc on a : $\dfrac{1}{3}\pi=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Longrightarrow S_2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}\pi^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

7. $g(t)=\dfrac{1}{\pi}(\pi-2|t|)$ sur $]-\pi,\pi[$

(a) $G(\nu)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt=\int_{-\pi}^{0} g(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt+\int_{0}^{\pi} g(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt$

dans la première intégrale on fait un changement de variable:

$x=-t\Longrightarrow dx=-dt,\begin{cases} t=0 & \to x=0\\ t=-\pi & \to x=\pi\end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$g(t)$ est paire donc $g(-x)=g(x)$ et $\displaystyle\int_{\pi}^{0}=-\int_{0}^{\pi}$ donc:

$$\int_{-\pi}^{0} g(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt=\int_{\pi}^{0} g(-x)\exp(2j\pi\nu x)(-dx)=\int_{0}^{\pi} g(x)\exp(2j\pi\nu x)\,dx \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Soit alors $G(\nu)=\displaystyle\int_{0}^{\pi} g(t)\exp(2j\pi\nu t)\,dt+\int_{0}^{\pi} g(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt$

$$=\int_{0}^{\pi} g(t)\left(\exp(2j\pi\nu t)+\exp(-2j\pi\nu t)\right)dt$$

$$=2\int_{0}^{\pi} g(t)\cos(2\pi\nu t)\,dt=2\int_{0}^{\pi} g(t)\cos(\omega t)\,dt \quad \boxed{\text{2 points}}$$

(b) Sur $]0,\pi[$: $g(t)=\dfrac{1}{\pi}(\pi-2t)$

$G(\nu)=2\displaystyle\int_{0}^{\pi} g(t)\cos(\omega t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-2t)\cos\omega t dt$

Intégration par parties: $\begin{cases} u=\pi-2t & \Longrightarrow & du=-2dt\\ dv=\cos\omega t dt & \Longrightarrow & v=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$G(\nu)=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi-2t}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\omega}\int_0^{\pi}\sin\omega t dt\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi-2t}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^{\pi}-\frac{2\cos\omega t}{\omega^2}\Big|_0^{\pi}\right\} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-\pi}{\omega}\sin\omega\pi-\frac{2}{\omega^2}(\cos\omega\pi-1)\right\}=-2\frac{\sin\omega\pi}{\omega}+4\frac{1-\cos\omega\pi}{\pi\omega^2} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$=-\frac{\sin 2\pi^2\nu}{\pi\nu}+\frac{1-\cos 2\pi^2\nu}{\pi^3\nu^2} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

$$=2\pi\left(-\frac{\sin 2\pi^2\nu}{2\pi^2\nu}\right)+\frac{2\sin^2\pi^2\nu}{\pi^3\nu^2}$$

$$= 2\pi \left(-\frac{\sin 2\pi^2\nu}{2\pi^2\nu} + \frac{\sin^2 \pi^2\nu}{\pi^4\nu^2} \right)$$