Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Analyse et calcul matriciel (MVA101)

Examen Final 2014-2015-Semestre I

Solutions

Exercice 1 (35 points) Soit la fonction 4π périodique telle que

$$f(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(t+\pi) & \text{si} \quad -2\pi<t<0 \\ \frac{1}{2}(t-\pi) & \text{si} \quad 0<t<2\pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f(t)$ sur $]-6\pi,6\pi[$
2. Trouver sa série de Fourier $S(t)$
3. Peut on dériver terme à terme la série obtenue ?.
4. Déterminer la série de Fourier de la fonction $4\pi-$périodique $g(t)$ telle que

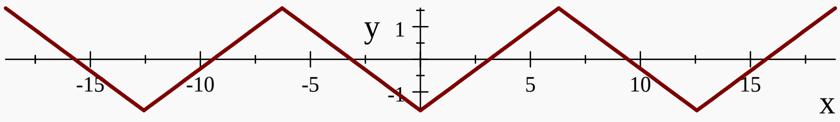
$$g(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2\pi<t<0 \\ -1 & \text{si} \quad 0<t<2\pi \end{cases}$$

5. Calculer l'énergie du signal $f(t)$
6. Déduire la somme :

(a) $S_1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ (b) $S_2=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ (c) $S_3=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$

Solution 1

1. Graphe : $\boxed{\text{5 points}}$ $6\pi=18.850$



2. $f(t)$ est paire, par suite $b_n=0\ \forall n\geq 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

d'autre part $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\,dt=2\int_{0}^{2\pi} f(t)\,dt$ alors il suffit de faire les calculs de a_0 et a_n sur $[0,2\pi]$

$$T=4\pi\Longrightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}\ \boxed{\text{1 point}}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = 2\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(t-\pi)\right)dt = 0 \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$= 2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(t-\pi)\right)\cos\left(\frac{n}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)\cos\left(\frac{n}{2}t\right)dt = 2\frac{\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ -\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2} & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \ \boxed{\text{5 points}}$$

d'où

$$S(t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)}{(2k+1)^2}\ \boxed{\text{2 points}}$$

3. La fonction $f(t)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la série de Fourier se converge uniformement vers f,donc on peut dériver la série terme à terme $\boxed{\text{2 points}}$
4. $g(t) = -2\dfrac{df}{dt}$
   comme on peut dériver la série $S(t)$ terme à terme alors la série de Fourier de $g(t)$ est $R(t) = -2\dfrac{dS}{dt}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $$R(t) = -2\left(-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}-\frac{2k+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)}{(2k+1)^2}\right) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)}{(2k+1)}\ \boxed{\text{3 points}}$$
5. $E = \displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} f^2(t)\,dt = \frac{2}{4}\int_0^{2\pi}(t-\pi)^2\,dt = \frac{\pi^3}{3}$ $\boxed{\text{2 points}}$
6. Calcul des sommes :
   (a) La fonction $f(t)$ est continue au point $t = 0$: $f(0) = -\dfrac{\pi}{2}$
   donc on a $f(0) = S(0) \iff -\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$
   Soit donc $S_1 = \dfrac{\pi^2}{8}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   (b) $g(t)$ est continue au point $t = \pi$: $g(\pi) = -1$ et on a $\sin\left(\dfrac{2k+1}{2}\pi\right) = (-1)^k$
   $g(\pi) = R(\pi) \iff -1 = -\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}$ d'où : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{3 points}}$
   (c) Formule de Parcevale : $E = E_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} E_n$
   $E_0 = Ta_0^2 = 4\pi \times 0 = 0$
   $$E_n = \frac{T}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = 2\pi\left(-\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\right)^2_{n=2k+1} = \frac{32}{\pi(2k+1)^4}$$

donc $E = \dfrac{\pi^3}{3} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{32}{\pi\left(2k+1\right)^4}$

et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(2k+1\right)^4} = \dfrac{1}{96}\pi^4$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 2 (35 points) On considère les signaux définis par

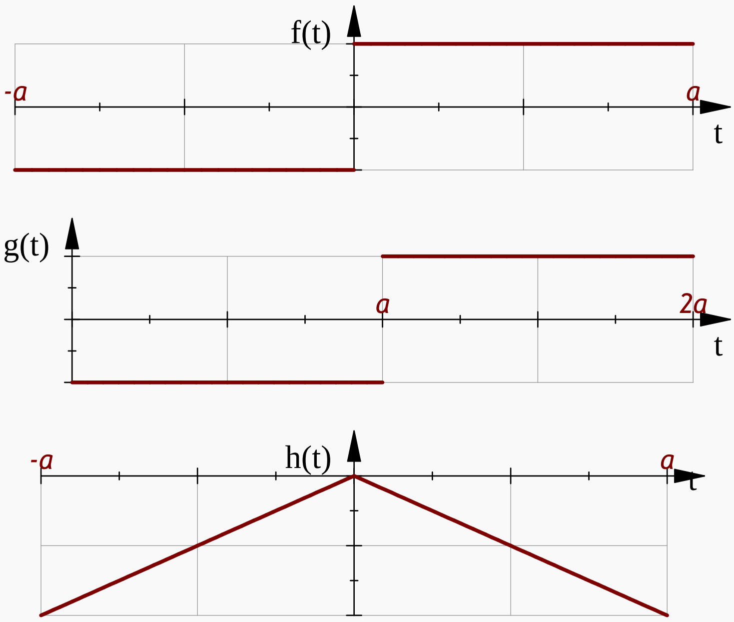
$$f\left(t\right) = \begin{cases} -a & si\ t \in \left]-a, 0\right[\\ +a & si\ t \in \left]0, a\right[\end{cases}, g\left(t\right) = \begin{cases} -a & si\ t \in \left]0, a\right[\\ +a & si\ t \in \left]a, 2a\right[\end{cases} \text{ et } h\left(t\right) = \begin{cases} t & si\ t \in \left]-a, 0\right[\\ -t & si\ t \in \left]0, a\right[\end{cases}$$

où a est un réel positif.

1. Tracer les graphes de $f\left(t\right)$, $g\left(t\right)$ et $h\left(t\right)$
2. Caluler la transformée de Fourier de $f\left(t\right)$ par deux méthode :
   (a) Par calcul intégral
   (b) Exprimer $f\left(t\right)$ en fonction du signal porte $p_a\left(t\right)$ puis calculer sa transformée de Fourier.
3. Déduire les transformées de Fourier de $g\left(t\right)$ et $h\left(t\right)$

Solution 2

1. graphes $\boxed{\text{5 points}}$



2. Soit $F\left(\nu\right) = \mathcal{F}\left(f\left(t\right)\right)$
   (a) Par calcul intégral :

$$F\left(\nu\right) = -a\int_{-a}^{0} \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt + a\int_{0}^{a} \exp\left(-2j\pi\nu t\right) dt$$

$f\left(t\right)$ est impaire donc $F\left(\nu\right) = -2ja\int\limits_{0}^{a} \sin\left(2\pi\nu t\right) dt$

Ou, en faisant un changement de variable dans la première intégrale $(t \rightarrow -t)$
On trouve

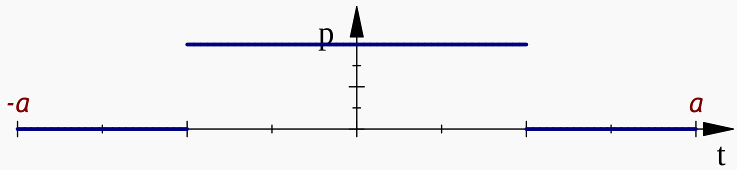
$$F(\nu) = -a\int_a^0 \exp(2j\pi\nu t)(-dt) + a\int_0^a \exp(-2j\pi\nu t)\,dt$$

$$= a\int_0^a (\exp(-2j\pi\nu t) - \exp(2j\pi\nu t))\,dt = -2aj\int_0^a \sin(2\pi\nu t)\,dt$$

$$= \frac{2aj}{2\pi\nu}\cos(2\pi\nu t)\Big|_0^a = \frac{aj}{\pi\nu}(\cos 2\pi\nu a - 1)$$

$$= -2aj\frac{\sin^2 a\pi\nu}{\pi\nu} \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

(b) $p_a(t) = \begin{cases} 1 & si \quad -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ 0 & si \quad non \end{cases} \Longrightarrow P_a(\nu) = \dfrac{\sin a\pi\nu}{\pi\nu}$



$$f(t) = ap_a\left(t - \frac{a}{2}\right) - ap_a\left(t + \frac{a}{2}\right) \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

D'après le théorème de translation on a : $\left[\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-2j\pi a\nu}\mathcal{F}(f(t))\right]$

$$F(\nu) = aP_a(\nu)e^{-aj\pi\nu} - aP_a(\nu)e^{aj\pi\nu}$$

$$= a\frac{\sin a\pi\nu}{\pi\nu}\left(e^{-aj\pi\nu} - e^{aj\pi\nu}\right) = a\frac{\sin a\pi\nu}{\pi\nu}(-2j\sin a\pi\nu)$$

$$= -2aj\frac{\sin^2 a\pi\nu}{\pi\nu} \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

3. Soit $G(\nu) = \mathcal{F}(g(t))$ et $H(\nu) = \mathcal{F}(h(t))$

-> On a $g(t) = f(t-a)$ donc $G(\nu) = e^{-2j\pi a\nu}F(\nu) = -2aje^{-2j\pi a\nu}\dfrac{\sin^2 a\pi\nu}{\pi\nu}$ $\boxed{5 \text{ points}}$

-> $h(t) = -\frac{t}{a}f(t)$ donc $H(\nu) = -\dfrac{1}{2aj\pi}\dfrac{dF}{d\nu}$

$$\frac{d}{d\nu}\left(\frac{2a\sin^2 a\pi\nu}{j\pi\nu}\right) = -\frac{ja}{\pi\nu^2}((\cos 2\pi a\nu - 1) + 2\pi a\nu\sin 2\pi a\nu)$$

soit $H(\nu) = \dfrac{1}{2aj\pi}\dfrac{ja}{\pi\nu^2}((\cos 2\pi a\nu - 1) + 2\pi a\nu\sin 2\pi a\nu)$

$$= \frac{1}{2\pi^2\nu^2}(\cos 2\pi a\nu + 2\pi a\nu\sin 2\pi a\nu - 1) \quad \boxed{10 \text{ points}}$$

Exercice 3 (30 points) : On considère la fonction

$$F(p) = \frac{8}{p^4 + 4}$$

La transformée de Laplace d'une fonction causale $f(t)$.

1. Montrer que $F(p)$ s'écrit

$$F(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + 2p + 2} + \frac{Cp + D}{p^2 - 2p + 2}$$

où A, B, C et D des réels à déterminer

2. Trouver la fonction $f(t)$
3. En utilisant la transformation de Laplace trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 2y = 8e^x \sin x$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

Solution 3

1. On a : $p^4 + 4 = p^4 + 4 + 4p^2 - 4p^2 = \left(p^2+2\right)^2 - 4p^2 = \left(p^2+2+2p\right)\left(p^2+2-2p\right)$

donc $F(p) = \dfrac{8}{\left(p^2-2p+2\right)\left(p^2+2p+2\right)}$ $\boxed{\text{2 points}}$

en fractions simples :

$F(p) = \dfrac{Ap+B}{p^2+2p+2} + \dfrac{Cp+D}{p^2-2p+2} = \dfrac{(Ap+B)\left(p^2-2p+2\right) + (Cp+D)\left(p^2+2p+2\right)}{p^4+4}$

$= \dfrac{(A+C)\,p^3 + (-2A+B+2C+D)\,p^2 + (2A-2B+2C+2D)\,p + 2B+2D}{p^4+4}$ $\boxed{\text{3 points}}$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} A + C = 0 \quad (1) \\ -2A + B + 2C + D = 0 \quad (2) \\ A - B + C + D = 0 \quad (3) \\ B + D = 4 \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \implies A = -C \\ (3) \implies -B + D = 0 \implies B = D \\ (4) \implies B = D = 2 \\ (2) \implies -4A = -B - D = -4 \implies A = 1 \implies C = -1 \end{cases} \quad \boxed{\text{4 points}}$$

D'où :

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+2} - \frac{p-2}{p^2-2p+2} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

2. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)^2+1} - \dfrac{p-2}{(p-1)^2+1}$

$= \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1} + \dfrac{1}{(p+1)^2+1} - \dfrac{p-1}{(p-1)^2+1} + \dfrac{1}{(p-1)^2+1}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$= \mathcal{L}\left(e^{-t}\cos t\right) + \mathcal{L}\left(e^{-t}\sin t\right) - \mathcal{L}\left(e^{t}\cos t\right) + \mathcal{L}\left(e^{t}\sin t\right)$

$f(t) = \left(e^{-t}(\cos t + \sin t) + e^{t}(-\cos t + \sin t)\right) u(t)$ $\boxed{\text{5 points}}$

3. Soit $Y = \mathcal{L}(y)$

$\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$

$\mathcal{L}(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y$

On a : $\mathcal{L}(y'' + 2y' + 2y) = 8\mathcal{L}(e^x \sin x)$

alors : $p^2Y + 2pY + 2Y = \dfrac{8}{(p-1)^2+1}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$\left(p^2+2p+2\right) Y = \dfrac{8}{p^2-2p+2}$

Soit $Y = \dfrac{8}{\left(p^2+2p+2\right)\left(p^2-2p+2\right)} = \dfrac{8}{p^4+4} = F(p)$ $\boxed{\text{5 points}}$

Donc $y(x) = f(x) = \left(e^{-x}(\cos x + \sin x) + e^{x}(-\cos x + \sin x)\right) u(x)$ $\boxed{\text{2 points}}$