Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Analyse et calcul matriciel (MVA101)

Examen Final 2015-2016

Solutions

Exercice 1 (50 points) On désigne par $\varphi(t)$ la fonction définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad -1 < t \leq 0 \\ 1-t & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \quad Ailleurs \end{cases}$$

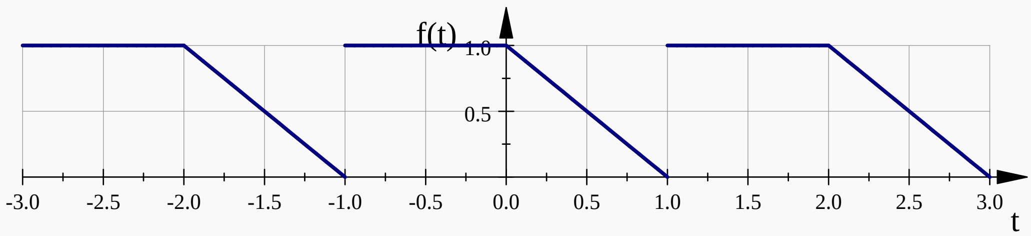
Soit $f(t)$ le signal $2-$périodique qui coïncide avec $\varphi(t)$ sur $]-1,1[$.

1. Tracer le graphe de $f(t)$ sur $]-3,3[$. $(5pts)$
2. Montrer que $f(t)$ est développable en série de Fourier. $(3pts)$
3. Calculer les coefficients complexes de Fourier, et en déduire les coefficients réels associés à $f(t)$ $(15pts)$
4. Déduire la série réelle de Fourier associée à $f(t)$. $(3pts)$
5. Calculer l'énergie de $f(t)$ $(4pts)$
6. Déduire les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$ $(4+4=8pts)$
7. Calculer $\Phi(\nu)$ la transformée de Fourier de $\varphi(t)$ $(12pts)$

BONUS $(5pts)$: Exprimer $\Phi(\nu)$ en fonction de C_n puis déduire $\Phi(\nu)$

Solution 1

1. Graphe : 5 points



2. La fonction $f(t)$ est bornée et continue sur chaque intervalle $]k,(k+1)[$, $(k \in \mathbb{Z})$, elle est, alors, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ par suite elle vérifie les critères de Dirichlet donc développable en série de Fourier. 3 points

3. Les coefficients complexes de Fourier sont $C_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\exp(-jn\omega t)\,dt$

   Le signal $f(t) = \varphi(t)$ sur $]-1,1[$.

La période de $f(t)$ est $T = 2$ donc sa fréquence fondamentale est : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Par suite :

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} e^{-jn\pi t}dt + \int_{0}^{1}(1-t)\,e^{-jn\pi t}dt\right) \boxed{\text{1 point}}$$

▲ $I_1 = \int_{-1}^{0} e^{-jn\pi t}dt = -\frac{1}{jn\pi}e^{-jn\pi t}\Big|_{-1}^{0}$
$= -\frac{1}{jn\pi}\left(1 - e^{-jn\pi}\right) = j\frac{1-(-1)^n}{n\pi}$ $\boxed{\text{2 point}}$

▲ $I_2 = \int_{0}^{1}(1-t)\,e^{-jn\pi t}dt$

l'intégration par partie nous donne :

$1-t \searrow$		$e^{-jn\pi t}$
$-1 \searrow$	$(+) \searrow$	$-\frac{1}{jn\pi}e^{-jn\pi t} = \frac{j}{n\pi}e^{-jn\pi t}$
0	$(-) \searrow$	$\frac{1}{j^2n^2\pi^2}e^{-jn\pi t} = -\frac{1}{n^2\pi^2}e^{-jn\pi t}$

$\boxed{\text{2 points}}$

d'où :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(j\frac{1-t}{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right)e^{-jn\pi t}\Big|_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{n^2\pi^2}e^{-jn\pi}\right) - \left(\frac{j}{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) = -\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{j}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{j}{n\pi} \boxed{\text{3 points}} \end{aligned}$$

On a :
$C_n = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{j}{n\pi} - j\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{j}{n\pi}\right)$ soit donc :

$$C_n = \frac{1-e^{-jn\pi}}{2\pi^2n^2} - j\frac{e^{-jn\pi}}{2\pi n} = \frac{1-(-1)^n}{2\pi^2n^2} - j\frac{(-1)^n}{2\pi n} \boxed{\text{1 point}}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}dt + \int_{0}^{1}(1-t)\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(t|_{-1}^{0} + \left(t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4} \boxed{\text{2 points}} \end{aligned}$$

Les coefficients réels de Fourier sont a_0, a_n et b_n tels que :

■ $a_0 = C_0 = \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

■ $a_n = 2\,\mathrm{Re}\,(C_n) = \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

■ $b_n = -2\,\mathrm{Im}\,(C_n) = \frac{(-1)^n}{\pi n}$ $\boxed{\text{1 point}}$

4. La série réelle de Fourier est $S(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

Soit donc :

$$S(t) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi t \boxed{\text{3 points}}$$

5. $E_f = \int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt = \int\limits_{-1}^{0} dt + \int\limits_{0}^{1} (1-t)^2 \, dt = \int\limits_{-1}^{0} dt + \int\limits_{0}^{1} \left(t^2 - 2t + 1\right) dt$

$= t|_{-1}^{0} + \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$ $\boxed{\text{4 points}}$

6. En chaque point t_0 où la fonction $f(t)$ est continue la série de Fourier se converge vers $f(t_0)$, où on peut écrire : $S(t_0) = f(t_0)$

♦ Pour $t_0 = 0$: $f(0) = 1$

$\cos(2k+1)\pi t|_{t=0} = 1$ et $\sin n\pi t|_{t=0} = 0$

Alors $S(0) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $\boxed{\text{1 points}}$

$S(0) = f(0) \Longrightarrow \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{2}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}$

d'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \boxed{\text{3 points}}$$

♦ Pour $t_0 = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\cos(2k+1)\pi t|_{t=\frac{1}{2}} = 0$ et $\sin n\pi t|_{t=\frac{1}{2}} = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ (-1)^k & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$

alors $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} (-1)^k = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ $\boxed{\text{1 points}}$

On a : $S\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ alors : $\frac{3}{4} - \frac{1}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{1}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \boxed{\text{3 points}}$$

7. $\Phi(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2j\pi\nu t} dt = \int\limits_{-1}^{0} e^{-2j\pi\nu t} dt + \int\limits_{0}^{1} (1-t) e^{-2j\pi\nu t} dt$

► $J_1 = \int\limits_{-1}^{0} e^{-2j\pi\nu t} dt = -\frac{1}{2j\pi\nu} e^{-2j\pi\nu t}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1 - e^{2j\pi\nu}}{2j\pi\nu} = j\frac{1 - e^{2j\pi\nu}}{2\pi\nu}$ $\boxed{\text{4 points}}$

► $J_2 = \int\limits_{0}^{1} (1-t) e^{-2j\pi\nu t} dt$:

on fait l'intégration par partie :

$1-t \searrow$		$e^{-2j\pi\nu t}$
$-1 \searrow$	$(+) \searrow$	$-\frac{1}{2j\pi\nu} e^{-2j\pi\nu t} = \frac{j}{2\pi\nu} e^{-2j\pi\nu t}$
0	$(-) \searrow$	$\frac{1}{4j^2\pi^2\nu^2} e^{-2j\pi\nu t} = -\frac{1}{4\pi^2\nu^2} e^{-2j\pi\nu t}$

$\boxed{\text{3 points}}$

$J_2 = \left(j\frac{1-t}{2\pi\nu} - \frac{1}{4\pi^2\nu^2}\right) e^{-2j\pi\nu t}\Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{4\pi^2\nu^2} e^{-2j\pi\nu}\right) - \left(\frac{j}{2\pi\nu} - \frac{1}{4\pi^2\nu^2}\right)$

$= \frac{1 - e^{-2j\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} - \frac{j}{2\pi\nu}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\Phi(\nu) = J_1 + J_2 = j\frac{1-e^{2j\pi\nu}}{2\pi\nu} + \frac{1-e^{-2j\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} - \frac{j}{2\pi\nu} \text{ Soit}$$

$$\Phi(\nu) = \frac{1-e^{-2j\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} - j\frac{e^{2j\pi\nu}}{2\pi\nu} \boxed{3 \text{ points}}$$

Bonus

On a $\Phi(\nu) = \int_{-1}^{1} \varphi(t) e^{-2j\pi\nu t} dt$ et $C_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} \varphi(t) \exp(-jn\omega t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(t) \exp(-jn\pi t)\, dt$

Pour $n = 2\nu$ on aura $C_{2\nu} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(t) \exp(-2j\pi\nu t)\, dt = \frac{1}{2}\Phi(\nu)$ ou bien : $\Phi(\nu) = 2C_{2\nu}$ $\boxed{2 \text{ points}}$

Or $C_n = \frac{1-e^{-jn\pi}}{2\pi^2 n^2} - j\frac{e^{-jn\pi}}{2\pi n}$

donc $\Phi(\nu) = 2\left(\frac{1-e^{-j2\nu\pi}}{2\pi^2(2\nu)^2} - j\frac{e^{-j2\nu\pi}}{2\pi(2\nu)}\right) = \frac{1-e^{-2j\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} - j\frac{e^{2j\pi\nu}}{2\pi\nu}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

Exercice 2 (15 points) Soit $f(t)$ une fonction $T-$périodique, dont la série de Fourier est :

$$S(t) = 2 + \cos\pi t + \frac{\cos 2\pi t}{4} + \frac{\cos 3\pi t}{9} + \frac{\cos 4\pi t}{16} + \cdots$$

1. Déterminer $T, \omega, a_0, a_n, b_n, C_n$ et C_0 $(7pts)$
2. $f(t)$ est-elle paire ou impaire.$(2pts)$
3. Si $f(t)$ est dérivable, quelle est la série de Fourier de sa dérivée.$(3pts)$
4. Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, quelle est l'énergie de f. $(3pts)$

Solution 2

1. $T = 2, \omega = \pi, a_0 = 2 = C_0, a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = 0, C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2n^2}$ $\boxed{1 \times 7 = 7\text{points}}$
2. $S(t)$ est une série de cosinus donc $f(t)$ est paire $\boxed{2 \text{ points}}$
3. La série de $f'(t)$ est $S'(t) = -\pi\left(\frac{\sin\pi t}{2} + \frac{\sin 2\pi t}{4} + \frac{\sin 3\pi t}{6} + \frac{\sin 4\pi t}{8}\right)$ $\boxed{3 \text{ points}}$
4. D'après la formule de Parseval : $E = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

   alors $E = 2(2^2) + \frac{2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 8 + \frac{\pi^4}{90}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

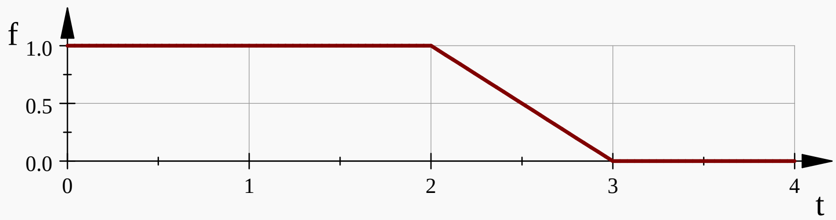
Exercice 3 (35 points) Soit les fonctions causales

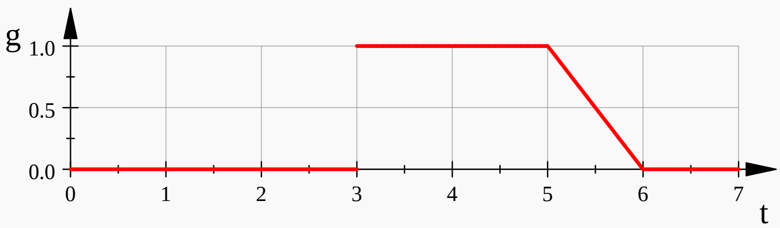
$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t \leq 2 \\ 3-t & si \quad 2 \leq t < 3 \\ 0 & si \quad ailleurs \end{cases}, g(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 3 < t \leq 5 \\ 6-t & si \quad 5 \leq t < 6 \\ 0 & si \quad ailleurs \end{cases} \text{ et } h(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 3 < t < 5 \\ -t^2+6t & \text{si} \quad 5 < t < 6 \\ 0 & \text{si} \quad ailleurs \end{cases}$$

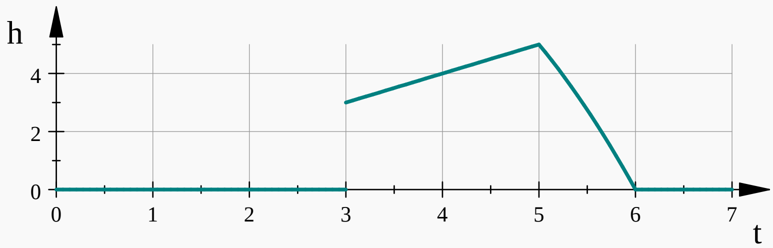
1. Tracer $f(t)$, $g(t)$ et $h(t)$ $(3+3+4=10pts)$
2. Exprimer $f(t)$ à l'aide de la fonction échelon unité $u_a = u(t-a)$ $(5pts)$
3. Calculer,$F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$. $(7pts)$
4. Exprimer $g(t)$ et $h(t)$ en fonction de $f(t)$. $(5pts)$
5. Déduire les transformée de Lapalce de $g(t)$ et $h(t)$ $(8pts)$

Solution 3

1. Graphe : $\boxed{\text{3+3+4=10 points}}$







2. $g(t) = u(t) - u(t-2) + (-t+3)(u(t-2) - u(t-3))$

$$= u_0 - u_2 + (-t+3)(u_2 - u_3) = u_0 + 2u_2 - 3u_3 - tu_2 + tu_3$$
$$= u_0 - (t-2)u_2 + (t-3)u_3 \boxed{\text{5 points}}$$

3. $\mathcal{L}(u_0) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathcal{L}(tu_0) = \dfrac{1}{p^2}$ donc $\mathcal{L}((t-a)u_a) = \dfrac{1}{p^2}e^{-ap}$

Par suite :

$$G(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p} \boxed{\text{7 points}}$$

4. $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 3 < t < 5 \\ -t+6 & \text{si} \quad 5 < t < 6 \\ 0 & \text{si} \quad t > 6 \end{cases} = f(t-3)$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 3 < t < 5 \\ -t^2+6t & \text{si} \quad 5 < t < 6 \\ 0 & \text{si} \quad t > 6 \end{cases} = t \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 3 < t < 5 \\ -t+6 & \text{si} \quad 5 < t < 6 \\ 0 & \text{si} \quad t > 6 \end{cases} = tg(t) = tf(t-3) \ \boxed{\text{2 points}}$$

5. On a $F(p) = \mathcal{L}(f(t)) \Longrightarrow \mathcal{L}(f(t-3)) = e^{-3p}F(p) = \frac{1}{p}e^{-3p} - \frac{1}{p^2}e^{-5p} + \frac{1}{p^2}e^{-6p}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h(t)) &= -\frac{d}{dp}\mathcal{L}(g(t)) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}e^{-3p} - \frac{1}{p^2}e^{-5p} + \frac{1}{p^2}e^{-6p}\right) \\ &= \frac{1}{p^3}\left(-4pe^{-3p} + 3p^2e^{-3p} - 2e^{-5p} + 2e^{-6p} + 6pe^{-6p}\right) \ \boxed{\text{5 points}} \end{aligned}$$