le cnam Liban

Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

Analyse et calcul matriciel (MVA101)

Examen Final 2016-2017 Durée : 2h :00

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

SOLUTIONS

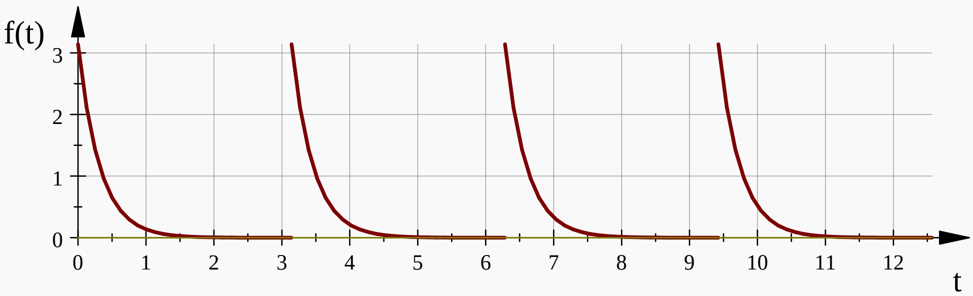
Exercice 1 (30 points) On considère la fonction $f(t)$, $\pi-$périodique telle que

$$f(t)=\pi e^{-\pi t} \quad si \quad 0<t<\pi$$

1. Tracer le graphe de $f(t)$ sur $[0,4\pi]$ $(4pts)$
2. Montrer que f est développable en série de Fourier.$(2pts)$
3. Calculer les coefficients complexes de Fourier associés à $f(t)$. $(8pts)$
4. En déduire la série réelle de Fourier. $(7pts)$
5. Calculer l'énergie de $f(t)$ $(3pts)$
6. Déduire la somme : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2+\pi^2}$ $(6pts)$

SOLUTION 1

1. Graphe : $\boxed{\textit{4 points}}$



2. La fonction $f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ elle est bornée, et les nombres des maximas et minimas sont en nombre fini, donc elle vérifie les critères de Direchlet et par suite développable en série de Fourier. $\boxed{\textit{2 points}}$
3. $T=\pi \Longrightarrow \omega=2$

$$C_n=\frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,e^{-jn\omega t}dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\pi e^{-\pi t}e^{-2jnt}dt=\int\limits_{0}^{\pi}e^{-(\pi+2jn)t}dt \quad \boxed{\textit{2 points}}$$

$$=-\frac{e^{-(\pi+2jn)t}}{\pi+2jn}\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{e^{-\pi t}e^{-2jnt}}{\pi+2jn}\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{e^{-\pi^2}e^{-2jn\pi}-1}{\pi+2jn} \quad \boxed{\textit{3 points}} \quad \left(N.B: e^{-2jn\pi}=1\right)$$

$$=\frac{\left(1-e^{-\pi^2}\right)(\pi-2jn)}{4n^2+\pi^2} \quad \boxed{\textit{3 points}}$$

4. $a_n = 2\operatorname{Re} C_n = 2\pi\dfrac{1-e^{-\pi^2}}{4n^2+\pi^2}$ 2 points, $b_n = -2\operatorname{Im} C_n = \dfrac{4n\left(1-e^{-\pi^2}\right)}{4n^2+\pi^2}$ 2 points, $a_0 = C_0 = \dfrac{1-e^{-\pi^2}}{\pi}$ 1 point

$$S(t) = \frac{1-e^{-\pi^2}}{\pi} + 2\left(1-e^{-\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi\cos 2nt + 2n\sin 2nt}{4n^2+\pi^2}$$ 2 points

5. $E_f = \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2\,dt = \pi^2\int_0^{\pi} e^{-2\pi t}dt = \pi^2 \left.\dfrac{e^{-2\pi t}}{-2\pi}\right|_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}\left(1-e^{-2\pi^2}\right)$ 3 points

6. Au points $t = 0$ la fonction $f(t)$ a une discontinuité de première espèce : donc la série de Fourier se converge vers $\dfrac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \dfrac{\pi - e^{-\pi^2}}{2}$ 2 points

$\Longrightarrow S(0) = \dfrac{1-e^{-\pi^2}}{\pi} + 2\left(1-e^{-\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\pi}{4n^2+\pi^2} = \dfrac{\pi - e^{-\pi^2}}{2}$ 2 points

$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2+\pi^2} = \dfrac{1}{2\pi\left(1-e^{-\pi^2}\right)}\left(\dfrac{\pi-e^{-\pi^2}}{2} - \dfrac{1-e^{-\pi^2}}{\pi}\right) = \dfrac{\pi - e^{-\pi^2}}{4\pi\left(1-e^{-\pi^2}\right)} - \dfrac{1}{2\pi^2}$ 2 points

Exercice 2 (20 points) Questions indépendantes :

1. Montrer que la transformée de Laplace de t^{α} est $\mathcal{L}(t^{\alpha}) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, en déduire $\mathcal{L}\left(t\sqrt{t}\right)$ et $\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ $(8pts)$
2. En utilisant la transformation de Laplace calculer $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-t}dt$ $(5pts)$
3. Soit $f(t) = e^{-at^2}$ où a est un réel positif. En calculant $\mathcal{F}(f*f)$, déduire la fonction $f*f$. $(7pts)$

SOLUTION 2

1. $\mathcal{L}(t^{\alpha}) = \int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-pt}dt$, soit $x = pt$ donc $dx = pdt$ et $t = \dfrac{x}{p}$

$\mathcal{L}(t^{\alpha}) = \int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-pt}dt = \int_0^{\infty}\left(\dfrac{x}{p}\right)^{\alpha}e^{-x}\dfrac{dx}{p} = \dfrac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-x}dx = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ 5 points

$\mathcal{L}\left(t\sqrt{t}\right) = \mathcal{L}\left(t^{3/2}\right) = \dfrac{\Gamma(5/2)}{p^{5/2}} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\sqrt{\pi}}{p^{5/2}}$ 2 points

$\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) = \dfrac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{p}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ 1 point

2. $\mathcal{L}(\sin t) = \dfrac{1}{p^2+1} \Longrightarrow \mathcal{L}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right) = \int_0^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-pt}dt = \int_p^{\infty}\dfrac{dp}{p^2+1} = \arctan p|_p^{\infty} = \dfrac{1}{2}\pi - \arctan p$

$\int_0^{\infty}\dfrac{e^{-t}\sin t}{t}dt = \mathcal{L}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)_{p=1} = \dfrac{1}{2}\pi - \arctan 1 = \dfrac{1}{2}\pi - \dfrac{1}{4}\pi = \dfrac{1}{4}\pi$ 5 points

3. On a pour tout $A > 0$: $\mathcal{F}\left(e^{-At^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{A}}$

   donc : $\mathcal{F}(f * f) = (\mathcal{F}(f))^2_{A=a} = \frac{\pi}{a}e^{-\frac{2\pi^2\nu^2}{a}} = \frac{\pi}{a}e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a/2}} = \frac{\pi}{a}\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{a}{2\pi}}e^{-at^2/2}\right)$ *5 points*

   donc $f * f = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}e^{-at^2/2}$ *2 points*

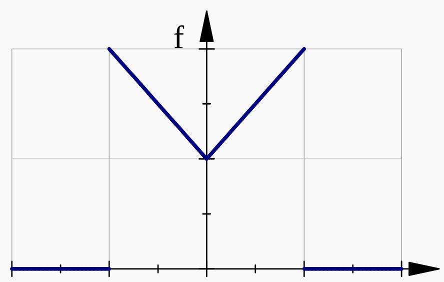
Exercice 3 (25 points) Soit les fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & si \ -a \leq x \leq a \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \cos 2x & si \ -\pi \leq x \leq 0 \\ -\cos 2x & si \ 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$$

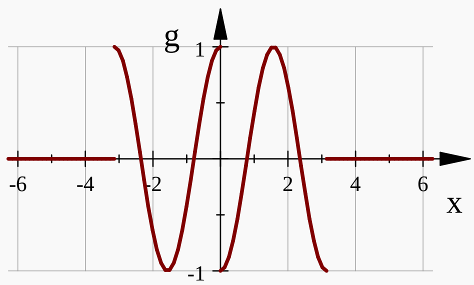
1. Tracer les graphes de $f(x)$ et $g(x)$ $(5pts)$
2. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$ $(14pts)$
3. Déduire celle de $g(x)$ $(6pts)$

SOLUTION 3

1. Graphes :



$f(x)$ *2 points*



$g(x)$ *3= points*

2. $F(\nu) = \int_{-a}^{0}(a-x)e^{-2j\pi\nu x}dx + \int_{0}^{a}(a+x)e^{-2j\pi\nu x}dx$ *2 points*

   Intégration par parties : $\begin{cases} u = a \pm x & \Longrightarrow du = \pm dx \\ dv = e^{-2j\pi\nu x}dx & \Longrightarrow v = -\frac{1}{2j\pi\nu}e^{-2j\pi\nu x} \end{cases}$ *3 points*

$$F(\nu) = \left(-\frac{(a-x)e^{-2j\pi\nu x}}{2j\pi\nu}\Bigg|_{-a}^{0} - \frac{1}{2j\pi\nu}\int_{-a}^{0}e^{-2j\pi\nu x}dx\right) + \left(-\frac{(a+x)e^{-2j\pi\nu x}}{2j\pi\nu}\Bigg|_{0}^{a} + \frac{1}{2j\pi\nu}\int_{0}^{a}e^{-2j\pi\nu x}dx\right)$$

2 points

$$F(\nu) = \left(-\frac{a-2ae^{2j\pi\nu a}}{2j\pi\nu} + \frac{1}{(2j\pi\nu)^2}e^{-2j\pi\nu x}\Bigg|_{-a}^{0}\right) + \left(-\frac{2ae^{-2j\pi\nu a}-a}{2j\pi\nu} - \frac{1}{(2j\pi\nu)^2}e^{-2j\pi\nu x}\Bigg|_{0}^{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{a-2ae^{2j\pi\nu a}}{2j\pi\nu} + \frac{1-e^{2j\pi\nu a}}{(2j\pi\nu)^2}\right) + \left(-\frac{2ae^{-2j\pi\nu a}-a}{2j\pi\nu} - \frac{e^{-2j\pi\nu a}-1}{(2j\pi\nu)^2}\right)$$ *3 points*

$$= j\frac{a - 2ae^{2j\pi\nu a}}{2\pi\nu} - \frac{1 - e^{2j\pi\nu a}}{4\pi^2\nu^2} + j\frac{2ae^{-2j\pi\nu a} - a}{2\pi\nu} + \frac{e^{-2j\pi\nu a} - 1}{4\pi^2\nu^2}$$

$$= 2aj\frac{e^{-2j\pi\nu a} - e^{2j\pi\nu a}}{2\pi\nu} + \frac{e^{2j\pi\nu a} + e^{-2j\pi\nu a} - 2}{4\pi^2\nu^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$= 2aj\frac{-2j\sin 2\pi a\nu}{2\pi\nu} + \frac{2\cos 2\pi a\nu - 2}{4\pi^2\nu^2} = 2a\frac{\sin 2\pi\nu a}{\pi\nu} - \frac{\sin^2 \pi\nu a}{\pi^2\nu^2} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

Soit

$$F(\nu) = a^2\left(4\frac{\sin 2\pi\nu a}{2a\pi\nu} - \frac{\sin^2 \pi\nu a}{(\pi\nu a)^2}\right)$$

3. La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = \begin{cases} -1 & si\ -a \leq x \leq 0 \\ 1 & si\ 0 \leq x \leq a \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$ donc $g(x) = -f'(x)\cos 2x$ et $a = \pi$ $\boxed{\text{1 point}}$

la transformée de Fourier de $f'(x)$ se déduit par la relation : $\mathcal{F}(f') = (2j\pi\nu)\mathcal{F}(f)$

Soit $F_1(\nu) = \mathcal{F}(f') = 2j\pi\nu\left(\frac{2a\sin 2\pi\nu a}{\pi\nu} - \frac{\sin^2 \pi\nu a}{\pi^2\nu^2}\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

d'après le théorème de Modulation : $\mathcal{F}\left[e^{2j\pi at}f(t)\right] = F(\nu - a)$ et $\mathcal{F}[f(t)\cos 2\pi\alpha t] = \frac{F(\nu-\alpha) + F(\nu+\alpha)}{2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

avec $\alpha = \frac{1}{\pi}$ on aura :

$$\mathcal{F}(g) = -\frac{F_1\left(\nu - \frac{1}{\pi}\right) + F_1\left(\nu + \frac{1}{\pi}\right)}{2} = -\frac{F_1\left(\frac{\pi\nu - 1}{\pi}\right) + F_1\left(\frac{\pi\nu + 1}{\pi}\right)}{2}$$

$$= j\pi\nu\left(\frac{2a\sin 2a(\pi\nu - 1)}{\pi\nu - 1} - \frac{\sin^2 a(\pi\nu - 1)}{(\pi\nu - 1)^2} - \frac{2a\sin 2a(\pi\nu + 1)}{\pi\nu - 1} + \frac{\sin^2 a(\pi\nu + 1)}{(\pi\nu - 1)^2}\right) \quad \boxed{\text{3 points}}$$

Exercice 4 (25 points) On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & si \quad 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & Ailleurs \end{cases}$$

1. Tracer $f(t)$ $(3pts)$
2. Calculer $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$ $(6pts)$
3. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $g(t)$, $\pi-$périodique qui coïncide avec $f(t)$ sur $[0, \pi]$. $(3pts)$
4. En utilisant la transformation de Laplace intégrer l'équation différentielle :

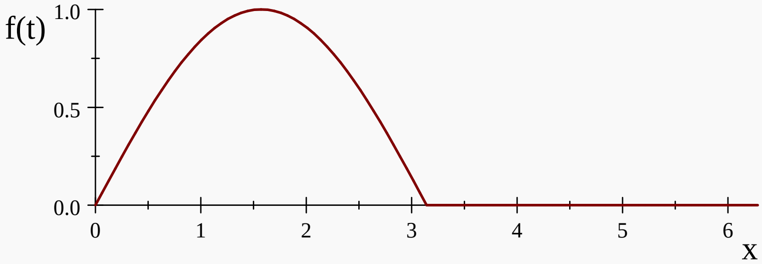
$$y'' + 4y = f(t)$$

sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. $(13pts)$

on rappelle $\sin(t - \pi) = -\sin t$

SOLUTION 4

1. Graphe : $\boxed{\text{3 points}}$



2. $f(t) = (u(t)\sin t - u(t-\pi)\sin(t-\pi)) = (u(t) + u(t-\pi))\sin t$ *3 points*

   donc $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1} + \dfrac{e^{-\pi p}}{p^2+1} = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$ *3 points*

3. $G(p) = \dfrac{F(p)}{1-e^{-\pi p}} = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$ *3 points*

4. Soit $Y(p) = \mathcal{L}(y)$ on a $\mathcal{L}(y) = p^2 Y$, car $y(0) = y'(0) = 0$

   Equation image : $(p^2+4)\,Y = F(p) = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$ *3 points*

   $Y = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(p^2+4)}$ *2 points*

   $\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \dfrac{1}{3(p^2+1)} - \dfrac{1}{3(p^2+4)}$ *3 points*

   $= \dfrac{1}{3}\left(\mathcal{L}(\sin t) - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t)\right)u(t) = \mathcal{L}(y_0(t))$ *3 points*

   Alors

$$y(t) = y_0(t) + y_0(t-\pi)$$ *2 points*

Formulaire

Représentation vectorielle de signaux :

1. Energie : $E_f = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt$
2. $f(t) \in \mathbb{L}^p(\mathbf{I}) \Longleftrightarrow \int_I |f(t)|^p \, dt$ existe
3. $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{I}} f(t) g^\star(t) dt$
4. $\widehat{f}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k;\ \alpha_k = \langle f, e_k \rangle$
5. $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2$
6. erreur : $\|e(t)\|^2 = \left\| f(t) - \widehat{f}(t) \right\|^2$

Séries de Fourier

fonction $T-$périodique : $f(t) = f(t+kT)$ où $k \in \mathbb{Z}, \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

1. Fonction paire : $f(-t) = f(t)$
2. Fonction impaire : $f(-t) = -f(t)$
3. $S_R(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$
   (a) $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt$
   (b) $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt$
   (c) $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt$
4. $S_C(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp(jn\omega t)$
   (a) $C_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \exp(-jn\omega t) dt$
   (b) $C_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$, $a_0 = C_0$
5. Parseval :$E = Ta_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

Transformation de Fourier

$\mathcal{F}[f(t)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2j\pi\nu t) \, dt$

$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(2j\pi\nu t) \, d\nu$

1. Translation : $\mathcal{F}[f(t-a)] = e^{-2j\pi\nu a} F(\nu)$
2. Homothétie : $\mathcal{F}[f(kt)] = \frac{1}{|k|} F\left(\frac{\nu}{k}\right)$
3. Modulation : $\mathcal{F}\left[e^{2j\pi a t} f(t)\right] = F(\nu - a)$
4. $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (2j\pi\nu)^n F(\nu)$
5. $\mathcal{F}\left[t^k f(t)\right] = \left(\frac{-1}{2j\pi}\right)^k \frac{d^k F(\nu)}{d\nu^k}$
6. $F(\nu) = A(\nu) + jB(\nu)$
7. $F(\nu) = |F(\nu)| \exp[j\theta(\nu)]$

$|F(\nu)| = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan\theta = \dfrac{B}{A}$

8. $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) \, dt$
9. $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \times \mathcal{F}[g]$
10. $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$
11. $\mathcal{F}[F(t)] = f(-\nu)$
12. $\mathcal{F}\left(e^{-At^2}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{A}} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{A}}$

Transformation de Laplace

échelon unité : $u(t-a) = \begin{cases} +1 & si \quad t > a \\ 0 & si \quad t < a \end{cases}$; Fonction causale : $f(t) u(t)$

$\pounds(f) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$

1. $\pounds\left[f(t-a)\right] = e^{-ap}F(p)$
2. $\pounds\left[e^{at}f(t)\right] = F(p-a)$
3. $\pounds[f(kt)] = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$
4. $\pounds\left[f * g\right] = \pounds\left[f\right] \times \pounds\left[g\right]$
5. $\pounds(f'(t)) = pF(p) - f(0)$
6. $\pounds\left[t^n f\right] = (-1)^n \dfrac{d^n F}{dp^n}$
7. $\pounds\left[\int_0^t f(x)dx\right](p) = \dfrac{1}{p}F(p)$
8. $\pounds\left[\frac{f(t)}{t}\right] = -\int F(p)\,dp$
9. périodique : $F(p) = \dfrac{\int_0^T f(u)e^{-pu}du}{1-e^{-pT}}$
10. TVI : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$
11. TVF : $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$

$\pounds\left[f^{(n)}\right] = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

Transformées de Laplace de quelques fonctions usuelles

1. $\pounds(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$
2. $\pounds\left(\sqrt{t}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$
3. $\pounds\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\ln p$
4. $\pounds\left(e^{\omega t}\right) = \dfrac{1}{p-\omega}$
5. $\pounds(\sin \omega t) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6. $\pounds(\cos \omega t) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
7. $\pounds(\sinh \omega t) = \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8. $\pounds(\cosh \omega t) = \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
9. $\pounds(\delta(t-a)) = e^{-pa}$

Formules diverses

1. $\sin(\varphi \pm \theta) = \sin\varphi\cos\theta \pm \cos\varphi\sin\theta$
2. $\cos(\varphi \pm \theta) = \cos\varphi\cos\theta \mp \sin\varphi\sin\theta$
3. $\tan(\varphi \pm \theta) = \dfrac{\tan\varphi \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\varphi\tan\theta}$
4. $\sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$
5. $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$
6. $\sin^3\varphi = \dfrac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$
7. $\cos^3\varphi = \dfrac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4}$
8. $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
10. $e^{\pm jn\pi} = (-1)^n$