le cnam Liban
Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

Analyse et calcul matriciel (MVA101)

Examen Partiel 2016-2017 **Durée : 1h :30**

centres de : Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

SOLUTION

Exercice 1 (10 points) Vrai ou Faux, justifier.

Chaque réponse correcte rapport 2 points, Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève 1 point.

1. $\{e_1, e_2\}$ est une base d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $x \in \mathbb{E}$, si $x = a_1e_1 + a_2e_2 = b_1e_1 - b_2e_2$ alors $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$
2. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, A et B sont les matrices de f et g, suivant une base donnée E. Si $f \circ g = g \circ f$ alors $AB = BA$.
3. 0 est une valeur propre pour tout endomorphisme.
4. Si $\lambda = 1$ est une valeur propre d'une matrice A, alors $\mu = 3$ est une valeur propre de A^3 .
5. Si $(\forall t \in \mathbb{R}) : \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$ alors $\cos(-t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$

SOLUTION. 1

1. $\boxed{FAUX}$: $x = a_1e_1 + a_2e_2 = b_1e_1 - b_2e_2 \Longrightarrow a_1 = b_1$ et $a_2 = -b_2$.
2. $\boxed{VRAI}$: $f \circ g = g \circ f \Longrightarrow M(f \circ g, E) = M(f, E) M(g, E) = AB = M(g \circ f, E) = BA$.
3. $\boxed{FAUX}$: $P(\lambda) = 0$ n'a pas toujours $\lambda = 0$ comme racine, mais le vecteur nul est propre pour tout endomorphisme.
4. $\boxed{FAUX}$: si λ est une valeur propre d'une matrice A, alors $\mu = \lambda^k$ est une valeur propre de A^k.
5. $\boxed{VRAI}$: $\cos t$ est paire : $\cos(-t) = \cos t$.

Exercice 2 (15 points) Soit A la matrice idempotente d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans une base donnée $\mathbb{E}$. Soit $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$ le ploynôme caractéristique de A.

1. Quelle est la valeur de n.
2. f est-elle inversible ?
3. Quelle est la valeur de $Tr(A)$.
4. Soit $g = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k\ fois}$, quelle est la matrice de g dans la base $\mathbb{E}$
5. Soit $B = A - I$, où I est la matrice identité. Calculer B^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

SOLUTION. 2

1. $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda : n = \deg P(\lambda) = 3$ $\boxed{2\ points}$
2. Si $P(\lambda) = \sum_{p=0}^{n} a_p \lambda^p$ alors $\det(A) = a_0$ dans notre cas $a_0 = 0$ donc A n'est pas inversible, par suite f n'est pas inversible. $\boxed{3\ points}$
3. D'après $P(\lambda) : Tr\ (A) = 2$ $\boxed{2\ points}$
4. A est une matrice idempotente : $A^2 = A \Longrightarrow A^k = A$
   $M(g, \mathbb{E}) = M(f^{\circ k}, \mathbb{E}) = A^k = A$ donc $g = f$ $\boxed{3\ points}$
5. $B^2 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = A - 2A + I = I - A = -B$
   $B^3 = B^2 B = -BB = -B^2 = B$
   $$B^k = -(-1)^k B \quad \boxed{5\ points}$$

Exercice 3 (45 points) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $\mathbb{E}$ par :

$$\forall u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(u) = (2a - b + c, 4a - 2b + 2c, -2a + b - c)$$

$\mathbb{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

1. Déterminer $A = M(f, E)$.
2. Calculer A^2, A^3en déduire $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$
3. L'application f est-elle inversible ?. Si oui trouver $f^{-1}(u)$.
4. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
5. Calculer la matrice e^{At}. En déduire la solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y - z \end{cases}$$

SOLUTION. 3

1. $A = M(f, E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{5\ points}$
2. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -A$
   $A^3 = A^2 A = -AA = -A^2 = A$
   On déduit :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* : A^n = (-1)^{n+1} A = \begin{cases} -A & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad \boxed{5\ points}$$

3. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc A n'est pas inversible, par suite f n'est pas inversible. $\boxed{\textit{4 points}}$

4. On a $|A| = 0$ donc $rang\,(A) < 3$.

d'autre part tous les mineurs d'ordre 2 sont nuls, tandis que les mineurs d'ordre 1 non-nuls.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

alors $\dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\dim \ker f = 2$ $\boxed{\textit{5 points}}$

On a $f(e_1) = -2f(e_2) = 2f(e_3)$

le vecteur de base peut être $f(e_1)$, ou $f(e_2)$ ou $f(e_3)$ $\boxed{\textit{4 points}}$

$\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

Si $u = (a, b, c) \in \ker f$ alors $f(u) = (2a - b + c, 4a - 2b + 2c, -2a + b - c) = (0, 0, 0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ 4a - 2b + 2c = 0 \\ -2a + b - c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow c = -2a + b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

Les vecteurs de base de $\ker f$ sont $u_1 = (1, 0, -2)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$ $\boxed{\textit{5 points}}$

5. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$

$$= I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^n A t^n}{n!} = I - A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = I - A\left(e^{-t} - 1\right) \quad \boxed{\textit{7 points}}$$

Remarque 0.1

On peut calculer e^{AT} autrement :

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-A)\,t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= I - A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = I + A\,(1 - \cosh t + \sinh t) = I - A\left(e^{-t} - 1\right)$$

En représentation vectorielle, le sécrit : $Y' = AY$, avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

La solution générale est : $Y = e^{At}C = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-t} & e^{-t} - 1 & 1 - e^{-t} \\ 4 - 4e^{-t} & 2e^{-t} - 1 & 2 - 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

$$Y = \begin{pmatrix} C_1\left(3 - 2e^{-t}\right) + C_2\left(e^{-t} - 1\right) - C_3\left(e^{-t} - 1\right) \\ C_1\left(4 - 4e^{-t}\right) + C_2\left(2e^{-t} - 1\right) - C_3\left(2e^{-t} - 2\right) \\ C_1\left(2e^{-t} - 2\right) - C_2\left(e^{-t} - 1\right) + C_3 e^{-t} \end{pmatrix} \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 3C_1 - C_2 + C_3 + (-2C_1 + C_2 - C_3)\,e^{-t} \\ y(t) &= 4C_1 - C_2 + 2C_3 + (-4C_1 + 2C_2 - 2C_3)\,e^{-t} \\ z(t) &= C_2 - 2C_1 + (2C_1 - C_2 + C_3)\,e^{-t} \end{aligned} \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

Exercice 4 (30 points) En utilisant le spectre de matrice intégrer le système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{dt} = -x - 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 7y$$

SOLUTION. 4

La matrice des coefficients dy système est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est :

$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13$ *2 points*

$\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 = (4j)^2$

Les racines sont complexes conjuguées : $\lambda = \dfrac{6+4j}{2} = 3 + 2j$ et $\overline{\lambda} = 3 - 2j$ *5 points*

Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ le vecteur propre associé à λ :

$Av = \lambda v \Longleftrightarrow \begin{cases} -a - 5b = (3+2j)\,a \\ 4a + 7b = (3+2j)\,b \end{cases} \Longrightarrow a = \left(-1 + \frac{1}{2}j\right) b$

$v = \begin{pmatrix} \left(-1 + \frac{1}{2}j\right) b \\ b \end{pmatrix}$ soit $V = \begin{pmatrix} -2+j \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *5 points*

$$X_1 = (u \cos \omega t - v \sin \omega t)\, e^{\alpha t}$$
$$X_2 = (u \sin \omega t + v \cos \omega t)\, e^{\alpha t}$$

$X_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right) e^{3t} = \begin{pmatrix} -2\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} e^{3t}$ *5 points*

$X_2 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t \right) e^{3t} = \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} e^{3t}$ *5 points*

$Y = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} -2\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 2t - 2\sin 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} e^{3t}$ *3 points*

$$\begin{cases} x(t) = ((-2C_1 + C_2)\cos 2t - (C_1 + 2C_2)\sin 2t)\, e^{3t} \\ y(t) = (2C_1 \cos 2t + 2C_2 \sin 2t)\, e^{3t} \end{cases}$$ *5 points*