Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Analyse et calcul matriciel - MVA101-

Examen de rattrapage 2010-2011 **Durée : 3h: 00**

Documents, téléphones, ordinateurs interdits

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Baakline, Baalbek, Ghazza,Tripoli, Bickfaya

---

Exercice 1 *Chercher une solution de l'équation différentielle :*

$$xy'' + y' + xy = 0$$

sous la forme : $y(x) = x^k \sum_{n-0}^{\infty} a_n x^n$ où k est une constante à déterminer, sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution 1 $y(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n x^{n+k-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) a_n x^{n+k-2}$$
$$xy'' + y' + xy = 0$$
$$\Rightarrow x \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) a_n x^{n+k-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n x^{n+k-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) a_n x^{n+k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n x^{n+k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k+1} = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+k)(n+k-1) + (n+k)] a_n x^{n+k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k+1} = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)^2 a_n x^{n+k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k+1} = 0$$
$$\Rightarrow k^2 a_0 x^{k-1} + (k+1)^2 a_1 x^k + (k+2)^2 a_2 x^{k+1} + \ldots + (n+k)^2 a_n x^{n+k-1} +$$
$$.. + a_0 x^{k+1} + a_1 x^{k+2} + \ldots + a_n x^{n+k+1} + \ldots = 0$$
$$\Rightarrow k^2 a_0 x^{k-1} + (k+1)^2 a_1 x^k + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+k)^2 a_n + a_{n-2}\right] x^{n+k-1} = 0$$

$k^2 a_0 = 0 \Rightarrow k = 0$ puisque $a_0 = y(0) = 1$

$(k+1)^2 a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$(n+k)^2 a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow n^2 a_n = -a_{n-2}$; $n \geq 2$

On remarque que $a_n = 0$ si n est impaire car $a_1 = 0$ donc:

$$(2m)^2 a_{2m} = -a_{2m-2} \Rightarrow a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2} = (-1)^m \frac{a_0}{(2m!)^2} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$y(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}$$

Exercice 2 *On considère la fonction $f(t)$ définie par:*

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 \\ 1 & si \quad 1 < t < 2 \\ 3 - t & si \quad 2 < t < 3 \end{cases} \quad \textit{et nulle ailleurs}$$

1. Tracer le graphe et calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$
2. Déduire la transformée de Laplace des fonctions

$$g(t) = \begin{cases} t^2 & si \quad 0 < t < 1 \\ t & si \quad 1 < t < 2 \\ 3t - t^2 & si \quad 2 < t < 3 \end{cases} \quad \text{et nulle ailleurs}$$

$$h(t) = \begin{cases} te^{2t} & si \quad 0 < t < 1 \\ e^{2t} & si \quad 1 < t < 2 \\ (3 - t) e^{2t} & si \quad 2 < t < 3 \end{cases} \quad \text{et nulle ailleurs}$$

3. Déterminer la fonction $k_a(t)$ dont sa transormée de Laplace est

$$K_a(p) = \frac{e^{ap}}{p^4 - 2p^3 + 5p^2}$$

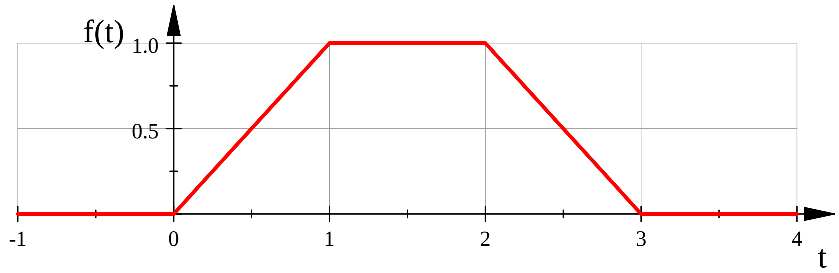
où a est un réel.

4. En déduire en fonction de $k_a(t)$ (pour différentes valeurs de a) la solution de l'équation différentielle:

$$y'' - 2y' + 5y = f(t) \tag{1}$$

vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

Solution 2 $f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 \\ 1 & si \quad 1 < t < 2 \\ 3 - t & si \quad 2 < t < 3 \\ 0 & si \quad t < 0 \\ 0 & si \quad t > 3 \end{cases}$



1. $F(p) = \int_0^1 te^{-pt}dt + \int_1^2 e^{-pt}dt + \int_2^3 (3 - t) e^{-pt}dt = \dfrac{e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1}{p^2}$

2. $g(t) = tf(t) \Longrightarrow G(p) = -\dfrac{d}{dp}F(p)$

   $h(t) = e^{2t}f(t) \Longrightarrow H(p) = F(p-2)$

3. $K_a(p) = \dfrac{e^{ap}}{p^4 - 2p^3 + 5p^2}$

   $$K_0(p) = \frac{1}{p^4 - 2p^3 + 5p^2} = \frac{1}{p^2(p^2 - 2p + 5)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{CP + D}{p^2 - 2p + 5}$$

   $$= \frac{2}{25p} + \frac{1}{5p^2} - \frac{\frac{2}{25}p + \frac{1}{25}}{p^2 - 2p + 5} = \frac{2}{25p} + \frac{1}{5p^2} - \frac{\frac{2}{25}p + \frac{1}{25}}{p^2 - 2p + 1 + 4}$$

   $$= \frac{2}{25p} + \frac{1}{5p^2} - \frac{1}{25}\left(\frac{2(p-1)+3}{(p-1)^2 + 4}\right) = \frac{2}{25p} + \frac{1}{5p^2} - \frac{1}{25}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+4} + \frac{3}{(p-1)^2+4}\right)$$

   $$\Longrightarrow k_0(t) = \left(\frac{2}{25} + \frac{t}{5} - \frac{1}{25}\left(2e^t\cos 2t + \frac{3}{2}e^t \sin 2t\right)\right)u(t)$$

   $K_a(p) = e^{ap}K_0(p) \Longrightarrow k_a(t) = k_0(t+a)$

4. $y'' - 2y' + 5y = f(t) \longrightarrow (p^2 - 2p + 5)Y = F(p) = \dfrac{e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1}{p^2}$

   $$Y(p) = \frac{e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1}{p^2(p^2 - 2p + 5)} = K_{-3}(p) - K_{-2}(p) - K_{-1}(p) + K_0(p)$$

   $y(t) = k_{-3}(t) - k_{-2}(t) - k_{-1}(t) + k_0(t)$

Exercice 3 *On désigne par* $f(x)$ *la fonction* $2\pi-$*périodique, définie sur* $]-\pi, \pi[$ *par:*

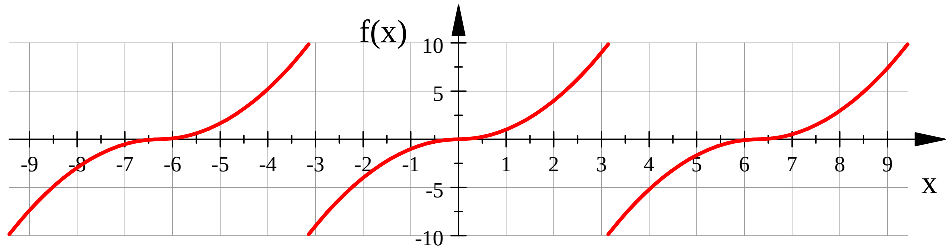
$$f(x) = x|x|$$

1. Tracer le graphe de $f(x)$ sur $]-3\pi, 3\pi[$
2. Montrer que $f(x)$ est impaire
3. Calculer la série complexe de Fourier associée à $f(x)$
4. Déduire la série réelle

Solution 3 $f(x) = x|x|$ *sur* $]-\pi, \pi[$

1. Graphe

   $(3\pi = 9.424\,8)$



2. Symètrie par rapport à l'origine $\Longrightarrow f(x)$ est impaire
   ou bien
   $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x) \Longrightarrow f(x)$ est impaire
3. $C_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, e^{-jn\omega x}dx$

   $T = 2\pi \rightarrow \omega = 1$

   sur $]-\pi,\pi[\, :\ f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

   $$C_n = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} x^2 e^{-jnx}dx + \int_{0}^{\pi} x^2 e^{-jnx}dx\right)$$

   Intégrations par parties:

   $$\begin{array}{ccc} u = x^2 & \rightarrow & du = 2xdx \\ dv = e^{-jnx}dx & \rightarrow & v = -\dfrac{1}{jn}e^{-jnx} \end{array}$$

   $$C_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{jn}e^{-jnx}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{jn}\int_{-\pi}^{0} xe^{-jnx}dx - \frac{x^2}{jn}e^{-jnx}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{2}{jn}\int_{0}^{\pi} xe^{-jnx}dx\right)$$

   $$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi^2}{jn}e^{jn\pi} - \frac{2}{jn}\int_{-\pi}^{0} xe^{-jnx}dx - \frac{\pi^2}{jn}e^{-jn\pi} + \frac{2}{jn}\int_{0}^{\pi} xe^{-jnx}dx\right)$$

   $$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2(-1)^n\pi^2}{jn} - \frac{2}{jn}\int_{-\pi}^{0} xe^{-jnx}dx + \frac{2}{jn}\int_{0}^{\pi} xe^{-jnx}dx\right)$$

   Deuxième fois par parties

   $$\begin{array}{ccc} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^{-jnx}dx & \rightarrow & v = -\dfrac{1}{jn}e^{-jnx} \end{array}$$

   $$C_n = \tfrac{1}{2\pi}\left(-\tfrac{2(-1)^n\pi^2}{jn} - \tfrac{2}{jn}\left(\left(-\tfrac{x}{jn}e^{-jnx}\Big|_{-\pi}^{0} + \tfrac{1}{jn}\int_{-\pi}^{0} e^{-jnx}dx\right) + \left(-\tfrac{x}{jn}e^{-jnx}\Big|_{0}^{\pi} + \tfrac{1}{jn}\int_{0}^{\pi} e^{-jnx}dx\right)\right)\right)$$

   $$= \tfrac{1}{2\pi}\left(-\tfrac{2(-1)^n\pi^2}{jn} - \tfrac{2}{jn}\left(\left(-\tfrac{\pi}{jn}e^{\pi jn} - \tfrac{1}{jn}\,\frac{e^{-jnx}}{jn}\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \left(-\tfrac{\pi}{jn}e^{-jn\pi} - \tfrac{1}{jn}\,\frac{e^{-jnx}}{jn}\Big|_{0}^{p}\right)\right)\right)$$

   $$C_n = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2(-1)^n\pi^2}{jn} - \frac{2}{jn}\left(\left(\frac{e^{-jnx}}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right) - \left(\frac{e^{-jnx}}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)\right)\right)$$

   $$= \frac{j}{2\pi}\left(\frac{2(-1)^n\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left((1-e^{jn\pi}) - (e^{-jn\pi}-1)\right)\right)$$

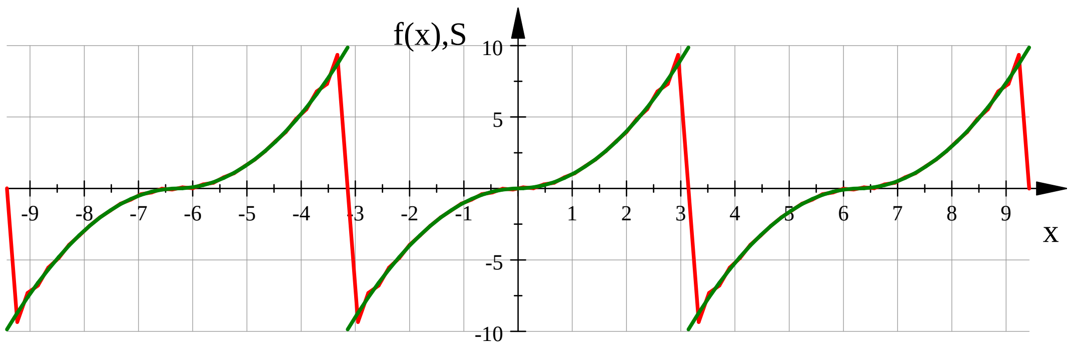
   $$= \frac{j}{2\pi}\left(\frac{2(-1)^n\pi^2}{n} + \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3}\right)$$

   $$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x|x|\,dx = 0$$

$$S_{\text{complex}}(x) = \frac{j}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left(\frac{2(-1)^n \pi^2}{n} + \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3} \right) \exp(jnx)$$

4. $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x|x| \sin nx dx = -2\operatorname{Im}(C_n) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \pi^2}{n} + \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3} \right)$

$$S_{réelle} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n \pi^2}{n} + \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3} \right) \sin nt \tag{2}$$



$$\sum_{n=1}^{50}$$

Exercice 4 *Résoudre, par calcul matriciel, le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

Solution 4 *:*

La matrice de coefficients est : $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de M est

$P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda-1)^2$

Les valeurs proprs sont telles que $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{et } \lambda_{2,3} = 1$

Les vecteurs propres sont V_i tels que $MV_i = \lambda_i V_i$

$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{2,3} = 1 \leftrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Y &= \sum_{k=1}^{3} C_k V_k \exp\left(\lambda_k t\right) \\
&= C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t \\
&= \begin{pmatrix} e^t \left(\frac{1}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_3 \right) - C_1 \\ C_2 e^t - 2C_1 \\ C_1 + C_3 e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\left(t\right) &= \frac{1}{2}\left(C_2 - C_3\right) e^t - C_1 \\
y\left(t\right) &= C_2 e^t - 2C_1 \\
z\left(t\right) &= C_3 e^t + C_1
\end{aligned}
$$