Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Analyse et calcul matriciel - MVA101 -

Examen de rattrapage 2011-2012 **Durée : 3h.**

Solutions + Barème

Exercice 1 (40 points) *Dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *on définit l'endomorphisme:*

$$\forall V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(V) = (3a - b + c, 4a - b + 2c, -2a + b)$$

relativement à la base canonique : $\mathbb{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

On pose $f^{\circ n}(V) = \left(\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ fois}\right)(V)$

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$
2. Calculer $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. Calculer $f^{\circ 2}(V)$en déduire: $f^{\circ n}(V)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
4. f est-il inversible? Justifier votre réponse.
5. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions.
6. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f.
7. Déduire que A est diagonalisable, donner la matrice diagonale D semblable à A, calculer D^n ($\forall n \in \mathbb{N}$) et retrouver A^n.
8. Calculer la matrice $\exp(At)$.
9. Soient $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ des fonctions de la variable réelle t vérifiants le système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y \end{cases} \qquad (S)$$

Déduire la solution générale du système (S)

Solution 1 $f(a, b, c) = (3a - b + c, 4a - b + 2c, -2a + b)$

1. $f(e_1) = f(1,0,0) = (3, 4, -1)$ $\qquad f(e_2) = f(0,1,0) = (-1, -1, 1)$

   $f(e_3) = f(0,0,1) = (1, 2, 0)$

   $$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ $\boxed{\text{2 points}}$

   A est une matrice idempotente donc $A^n = A\ \forall n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{1 points}}$

3. $(f \circ f)\, v = A^2 v = Av \Longrightarrow f \circ f = f$ Par suite $f \circ f \circ \cdots \circ f = f$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. On a $A = M(f, \mathbb{E})$, f est inversible si A est inversible

   $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible, par suite f est non inversible. $\boxed{\text{2 points}}$

5. Image et noyau de f

   - $\ker f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \diagup f(a,b,c) = (0,0,0)\right\}$
     si $(a,b,c) \in \ker f \Longrightarrow f(a,b,c) = (3a - b + c, 4a - b + 2c, -2a + b) = (0,0,0)$
     $\Longrightarrow \begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ 4a - b + 2c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ La solution du système est: $\begin{cases} b = 2a \\ c = -a \end{cases}$
     d'où: $\ker f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \diagup (a,b,c) = (a, 2a, -a) = a(1,2,-1)\right\}$ $\boxed{\text{3 points}}$
     $\dim(\ker f) = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$
   - $\mathrm{Im}(f) = \left\{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \diagup (X,Y,Z) = f(a,b,c)\right\}$
     on remarque que $Z = -2X + Y$
     $\Longrightarrow (X,Y,Z) = (X, Y, -2X + Y) = (X, 0, -2X) + (0, Y, -Y)$
     $= X(1,0,-2) + Y(0,1,-1)$ $\boxed{\text{3 points}}$
     $\{(1,0,-2), (0,1,-1)\}$ constitue une base de $\mathrm{Im}\, f$
     $\Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ $\boxed{\text{1 points}}$

     Ou bien:
     $f(a,b,c) = af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3)$
     $f(e_1) = (3,4,-2)$, $f(e_2) = (-1,-1,1)$, $f(e_3) = (1,2,0)$
     Or : $f(e_1) + 2f(e_2) = f(e_3)$ donc:
     $(X,Y,Z) = f(a,b,c) = af(e_1) + bf(e_2) + c(f(e_1) + 2f(e_2))$
     $= (a + c) f(e_1) + (b + 2c) f(e_2) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$

6. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

   $= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = -\lambda(\lambda - 1)^2$ $\boxed{\text{3 points}}$

   Les valeurs propres sont telles que $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Les vecteurs propres sont tels que : $AV = \lambda V$ $\boxed{\text{3 points =1+1+1}}$

   - $\lambda_1 = 0 \longleftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$:

$$Av_1=\lambda_1 v_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3\alpha_1-\beta_1+\gamma_1=0 \\ 4\alpha_1-\beta_1+2\gamma_1=0 \\ \beta_1-2\alpha_1=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_1=2\alpha_1 \\ \gamma_1=-\alpha_1 \end{array}\right.$$

$$v_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 2\alpha_1\\ -\alpha_1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \text{ soit } V_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

- $\lambda_2=1 \longleftrightarrow v_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{pmatrix}$:

$$Av_2=\lambda_2 v_2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3\alpha_2-\beta_2+\gamma_2=\alpha_2 \\ 4\alpha_2-\beta_2+2\gamma_2=\beta_2 \\ \beta_2-2\alpha_2=\gamma_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \beta_2-2\alpha_2=\gamma_2$$

$$v_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \beta_2-2\alpha_2\end{pmatrix}=\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } V_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \text{ et } V_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

7. A admet trois vecteurs propres dont la matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$

   A est semblable à la matrice diagonale $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,telle que : $A=PDP^{-1}$

   On a $D^n=D\ \forall n\in\mathbb{N}$ donc $A^n=PD^nP^{-1}=PDP^{-1}=A$ $\boxed{\text{3 points}}$

8. $\exp(At)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^nt^n=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots$

$$=I+A\left(t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots\right)=I+A\left(e^t-1\right) \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\left(e^t-1\right)\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^t-2&1-e^t&e^t-1\\4e^t-4&2-e^t&2e^t-2\\2-2e^t&e^t-1&1\end{pmatrix} \quad \boxed{\text{3 points}}$$

9. Le système différentiel: s'écrit: $Y'=AY$

- Par méthode e^{At} :

$$Y=e^{At}C=\begin{pmatrix}3e^t-2&1-e^t&e^t-1\\4e^t-4&2-e^t&2e^t-2\\2-2e^t&e^t-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\left(3e^t-2\right)-C_2\left(e^t-1\right)+C_3\left(e^t-1\right)\\ C_3\left(2e^t-2\right)+C_1\left(4e^t-4\right)-C_2\left(e^t-2\right)\\ C_3-C_1\left(2e^t-2\right)+C_2\left(e^t-1\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x(t)=-2C_1+C_2-C_3+(3C_1-C_2+C_3)e^t\\ y(t)=-4C_1+2C_2-2C_3+(4C_1-C_2+2C_3)e^t\\ z(t)=2C_1-C_2+C_3-(2C_1-C_2)e^t\end{pmatrix}$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{c} x(t) = A + Be^t \\ y(t) = 2A + Ce^t \\ z(t) = -A + (C - 2B)e^t \end{array}\right. \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

- Par méthode des vecteurs propres:

$$Y = \sum_{i=1}^{3} C_i V_i \exp(\lambda_i t)$$
$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

Soit

$$\begin{array}{c} x = C_1 + C_2 e^t \\ y = 2C_1 + C_3 e^t \\ z = -C_1 + (C_3 - 2C_2) e^t \end{array} \quad \boxed{3 \text{ points}}$$

Exercice 2 (30 points) *On considère la fonction définie sur* $[0, 1]$ *par:*

$$\varphi(t) = 1 - t$$

et soit $f(t)$ *la fonction* $2-$*périodique, et paire qui coïncide avec* $\varphi(t)$ *sur* $[0, 1]$

1. Tracer le graphe de $f(t)$ sur $[-5, 5]$.
2. Calculer la série réelle de Fourier associée à $f(t)$.
3. Déduire la série de Fourier associée à la fonction $2-$périodique

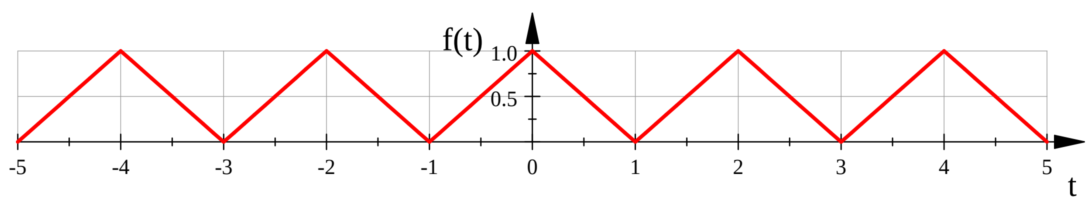
$$g(t) = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & si & -1 \leq t \leq 0 \\ -1 & si & 0 \leq t \leq 1 \end{array}\right.$$

   Tracer le graphe de $g(t)$ sur $[-5, 5]$

4. Déduire les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$
5. Calculer $\Phi(\nu)$ la transformée de Fourier de $\varphi(t)$.

Solution 2 *:*

1. Graphe: $\boxed{3 \text{ points}}$



2. $f(t)$ est paire donc $b_n = 0 \; \forall n \geq 1$, et $T = 2 \Longrightarrow \omega = \pi$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(2\int_0^1 (-t+1)\,dt\right) = \frac{1}{2} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\left(2\int_0^1 (-t+1)\cos(n\pi t)\,dt\right) = 2\int_0^1 (-t+1)\cos(n\pi t)\,dt$$

Par parties: $\begin{cases} u = -t+1 & \Longrightarrow \quad du = -dt \\ \cos n\pi t dt = dv & \Longrightarrow \quad v = \dfrac{\sin n\pi t}{n\pi} \end{cases}$

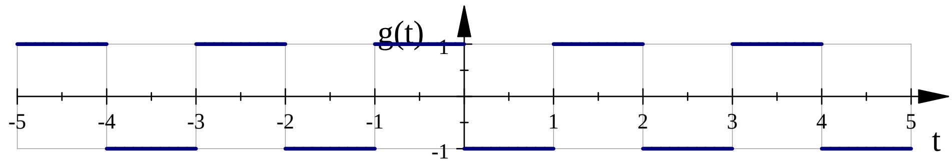
$$a_n = 2\left((-t+1)\underbrace{\frac{\sin n\pi t}{n\pi}}_{=0}\right)_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi t dt$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi t\Big|_0^1 = -\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi^2 n^2}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi^2 n^2} = \dfrac{4}{\pi^2(2k+1)^2} & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad \boxed{\text{7 points}}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}\right) \qquad \boxed{\text{1 point}}$$

3. Graphe: $\boxed{\text{2 points}}$



$g(t)$ est la dérivée de $f(t)$, donc sa série de Fourier est $S'(t) = \dfrac{dS}{dt}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$S'(t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi t}{2k+1} \qquad \boxed{\text{1 point}}$$

4. $f(t)$ est continue au point $t = 0 \Longrightarrow$

$$f(0) = 1 = S(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}S_1$$

d'où: $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ $\boxed{\text{2 points}}$

on a $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k \Longrightarrow \sin(2k+1)\pi t = (-1)^k$ si $t = \frac{1}{2}$

$$g(1/2) = -1 = S'(1/2) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi/2}{2k+1} = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Finalement : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{3 points}}$

5. $\Phi(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt = \int_0^1 (1-t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt = \frac{1}{4\pi^2\nu^2}\left(1 - e^{-2j\pi\nu} - 2j\pi\nu\right)$

$\boxed{\text{5 points}}$

Exercice 3 (30 points) *Soit la fonction causale:*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & si \quad x \geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

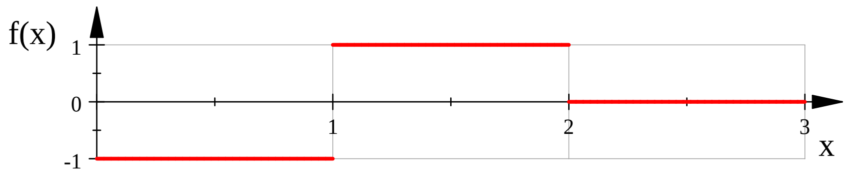
1. Tracer le graphe de $f(x)$
2. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction échelon unité.
3. Calculer la transformée de Laplace de $f(x)$.
4. Soit $H_\alpha(p) = \dfrac{e^{-\lambda p}}{p^3 - 2p^2 + 5p}$ la transformée de Lapace de la fonction $h_\lambda(x)$ .Déterminer la fonction $h_0(x)$, et déduire $h_1(x)$ et $h_2(x)$.
5. Déduire la solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = f(x) \tag{2}$$

Vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

Solution 3 *:*

1. Graphe : $\boxed{\text{2 points}}$



2. $f(x) = (-1)(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) = -u_0 + 2u_1 - u_2$ $\boxed{\text{3 points}}$
3. $F(p) = -\dfrac{1}{p} + 2\dfrac{e^{-p}}{p} - \dfrac{e^{-2p}}{p} = -\dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p} = -\dfrac{(e^{-p} - 1)^2}{p}$ $\boxed{\text{5 points}}$
4. $H_0(p) = \dfrac{1}{p^3 - 2p^2 + 5p} = \dfrac{1}{p(p^2 - 2p + 5)} = \dfrac{1}{5p} - \dfrac{1}{5}\dfrac{p-2}{p^2 - 2p + 5}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p-2}{p^2 - 2p + 4 + 1}\right) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p-2}{(p-1)^2 + 4}\right)$

$= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(p-1)^2 + 4}\right)$ $\boxed{\text{5 points}}$

$= \dfrac{1}{5}\mathcal{L}\left(1 - e^x \cos 2x + \dfrac{1}{2} e^x \sin 2x\right)$

$$h_0(x) = \frac{1}{5}\left(1 - e^x \cos 2x + \frac{1}{2} e^x \sin 2x\right) u(x)$$

$h_\alpha(x) = h_0(x - \alpha)$

5. Equation image: $\mathcal{L}(y'' - 2y' + 5y) = F(p)$

$\Longrightarrow (p^2 - 2p + 5)\, Y = -\dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$\Longrightarrow Y = -\dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p(p^2 - 2p + 5)} = -H_2(p) + 2H_1(p) - H_0(p)$

$y(x) = -h_2(x) + 2h_1(x) - h_0(x)$ $\boxed{\text{5 points}}$