Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Analyse et calcul matriciel (MVA101)

*Examen de **rattrapage** 2014-2015-Semestre I*

Solutions

Exercice 1 (35 points) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique $\mathbb{E}$ par :

$$\forall v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (3a - 2b, 4a - 3b, 4a - 2b - c)$$

avec $\mathbb{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$ $(2pts)$
2. Calculer A^2, A^3, en déduire A^n $(\forall n \in \mathbb{N})$. $(5pts)$
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f. $(8pts)$
4. Calculer la matrice $\exp(At)$. $(10pts)$
5. Déterminer la solution du système diffèrentiel (S) :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - 2y - z \end{cases} \qquad (S)$$

où $x = x(t), y = y(t)$ et $z = z(t)$ des fonctions de la variable réelle t $(10pts)$

Solution 1

1. $f(1, 0, 0) = (3, 4, 4) \qquad f(0, 1, 0) = (-2, -3, -2) \qquad f(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 = A^2 A = IA = A$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Par récurrence on trouve $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k + 1 \end{cases} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3. Les valeurs prorpres sont les racines de l'équation caractéristique $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1-\lambda & -3-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \text{racine simple} \\ \lambda_{2,3} = -1 & \text{racine double} \end{cases} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

Les vecteurs propres sont $v_i / Av_i = \lambda_i v_i$
On trouve

$\lambda_1 = 1 \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_{2,3} = -1 \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3 points

4. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} I \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} A \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ 3 points

$= I \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \cosh t + A \sinh t$ 3 points

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh t + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sinh t$

$= \begin{pmatrix} \cosh t + 3\sinh t & -2\sinh t & 0 \\ 4\sinh t & \cosh t - 3\sinh t & 0 \\ 4\sinh t & -2\sinh t & \cosh t - \sinh t \end{pmatrix}$ 4 points

5. Sous forme matricielle le système s'écrit :

$$Y'(t) = AY(t)$$

où $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ 2 points

La solution peut se déterminer par deux méthodes (on demande une seule) :

A l'aide de la matrice exp(At) :

A l'aide de la matrice $\exp(At)$:

$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t + 3\sinh t & -2\sinh t & 0 \\ 4\sinh t & \cosh t - 3\sinh t & 0 \\ 4\sinh t & -2\sinh t & \cosh t - \sinh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} C_1(\cosh t + 3\sinh t) - 2C_2 \sinh t \\ 4C_1 \sinh t + C_2(\cosh t - 3\sinh t) \\ 4C_1 \sinh t - 2C_2 \sinh t + C_3(\cosh t - \sinh t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} C_1 \cosh t + (3C_1 - 2C_2)\sinh t \\ (4C_1 - 3C_2)\sinh t + C_2 \cosh t \\ (4C_1 - 2C_2 - C_3)\sinh t + C_3 \cosh t \end{pmatrix}$ 6 points

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cosh t + (3C_1 - 2C_2)\sinh t \\ y(t) &= (4C_1 - 3C_2)\sinh t + C_2 \cosh t \\ z(t) &= (4C_1 - 2C_2 - C_3)\sinh t + C_3 \cosh t \end{aligned}$$ 2 points

A l'aide des vecteurs propres et valeurs propres :

$Y(t) = \sum_{i=1}^{3} C_i V_i e^{\lambda_i t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \left(C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{-t}$ 4 points

$= \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_3 e^{-t} \\ C_1 e^t + 2C_3 e^{-t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$ 2 points

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_3 e^{-t} \\ y(t) &= C_1 e^t + 2C_3 e^{-t} \\ z(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{aligned}$$ 2 points

Exercice 2 (40 points) Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on définit la fonction :

$$\varphi(x) = x(\pi - x)$$

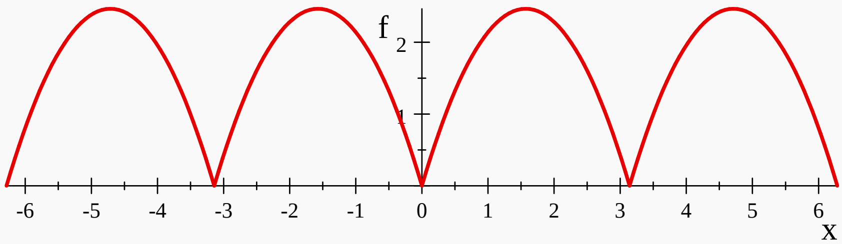
et soit $f(x)$ la fonction $\pi-$périodique qui coïncide avec $\varphi(x)$ sur $[0, \pi]$

Soit $\gamma(x) = \dfrac{d\varphi}{dx}$ et on désigne par $g(x)$ la dérivée de $f(x)$.

1. Tracer le graphe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ $(5pts)$
2. Calculer la série réelle de Fourier associée à $f(x)$ $(15pts)$
3. Tracer la courbe représentative de $g(x)$ sur $[-2\pi, 2\pi]$ $(5pts)$
4. Déduire la série de Fourier de $g(x)$. $(5pts)$
5. Calculer $\Gamma(\nu)$ la transformée de Fourier de $\gamma(x)$, déduire celle de $\varphi(x)$. $(10pts)$

Solution 2

1. Graphe : 5 points



$f(x)$

2. $\varphi(x) = x(\pi - x) = \pi x - x^2$

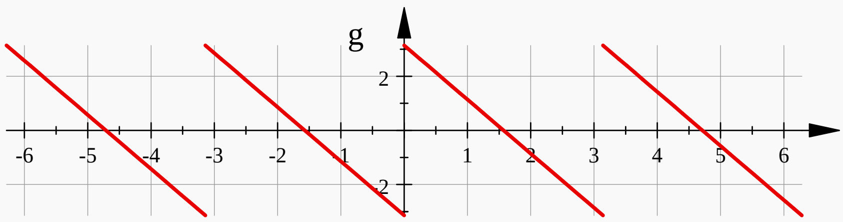
   $f(x)$ est paire donc $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. 2 points

   $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\cos 2nx dx = -\dfrac{1}{n^2}$ En intégrant deux fois par parties 8 points

   $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, dx = \dfrac{1}{6}\pi^2$ 3 points

$$S_f(x) = \frac{1}{6}\pi^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos 2nx \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

3. *Graphe* de $g(x)$



5 points

4. $S_g(x) = \dfrac{dS_f}{dx} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin 2nx$ 5 points
5. $\gamma(x) = \pi - 2x$ sur $]0, \pi[$ et nulle ailleurs

   $\Gamma(\nu) = \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\, e^{-2j\pi\nu x} dx$

Par parties : $\begin{cases} u = \pi - 2x & \Longrightarrow & du = -2dx \\ dv = e^{-2j\pi\nu x}dx & \Longrightarrow & v = -\dfrac{1}{2j\pi\nu}e^{-2j\pi\nu x} \end{cases}$

$$\Gamma(\nu) = -\frac{\pi - 2x}{2j\pi\nu}e^{-2j\pi\nu x}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{j\pi\nu}\int_0^{\pi} e^{-2j\pi\nu x}dx$$

$$= -\frac{-\pi e^{-2j\pi^2\nu} - \pi}{2j\pi\nu} + \frac{1}{2j^2\pi^2\nu^2}e^{-2j\pi\nu x}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{e^{-2j\pi^2\nu}+1}{2j\nu} + \frac{e^{-2j\pi^2\nu}-1}{2j^2\pi^2\nu^2}$$

$$= \frac{e^{-2j\pi^2\nu}+1}{2j\nu} - \frac{e^{-2j\pi^2\nu}-1}{2\pi^2\nu^2} \quad \boxed{\text{7 points}}$$

On a $\mathcal{F}(f') = (2j\pi\nu)\mathcal{F}(f)$

d'où $\Phi(\nu) = \dfrac{1}{2j\pi\nu}\Gamma(\nu) = -\dfrac{e^{-2j\pi^2\nu}+1}{4\pi\nu^2} + j\dfrac{e^{-2j\pi^2\nu}-1}{4\pi^3\nu^3}$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 3 (25 points) En utilisant la transformation de Laplace, intégrer l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = f(x)$$

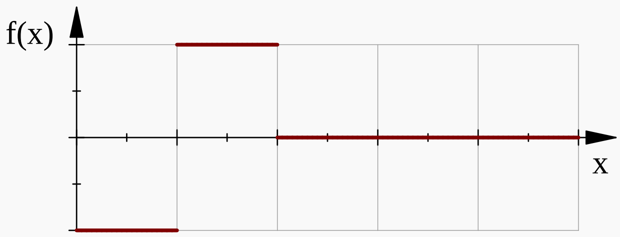
où $f(x)$ est la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -a & si \quad 0 < x < a \\ +a & si \quad a < x < 2a \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ et a une constante positive donnée.

Solution 3

On pose $u(x-a) = u_a = \begin{cases} 1 & si \quad x > a \\ 0 & si \quad x < a \end{cases}$



$f(x) = -a(u_0 - u_a) + a(u_a - u_{2a}) = -au_0 + 2au_a - au_{2a}$

où $u_a = u(x-a)$ telle que sa transformée de Laplace est $\dfrac{e^{-ap}}{p}$ donc :

$F(p) = a\dfrac{-1 + 2e^{-ap} - e^{-2ap}}{p}$ $\boxed{\text{5 points}}$

Soit $Y(p) = \mathcal{L}(y)$

alors $\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$ et $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - y(0)p - y'(0) = p^2Y$

L'équation image est

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y\right) = \mathcal{L}(f(x))$$

$$\Longrightarrow p^2Y + 2py + Y = F(p)$$

$$Y(p^2 + 2p + 1) = a\frac{-1 + 2e^{-ap} - e^{-2ap}}{p}$$

$$Y = a\frac{-1 + 2e^{-ap} - e^{-2ap}}{p(p^2 + 2p + 1)} \quad \boxed{\text{10 points}}$$

Soit $H\left(p\right)=\dfrac{1}{p\left(p^{2}+2p+1\right)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{1+p}-\dfrac{1}{\left(1+p\right)^{2}}=\mathcal{L}\left(h\left(x\right)\right)$
$\dfrac{1}{p}=\mathcal{L}\left(1\right),\ \dfrac{1}{1+p}=\mathcal{L}\left(e^{-x}\right)$ et $\dfrac{1}{\left(1+p\right)^{2}}=\mathcal{L}\left(xe^{-x}\right)$
alors $h\left(x\right)=a\left(1-e^{-x}-xe^{-x}\right)u\left(x\right)$
En fonction de $H\left(p\right)$: $Y\left(p\right)=\left(-1+2e^{-ap}-e^{-2ap}\right)H\left(p\right)$ donc

$$y\left(x\right)=-h\left(x\right)+2h\left(x-a\right)-h\left(x-2a\right)\ \boxed{\text{10 points}}$$