Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Analyse et calcul matriciel (MVA101)

Examen de ***Rattrapage*** *2015-2016* **Durée : 2h :00**

Solution

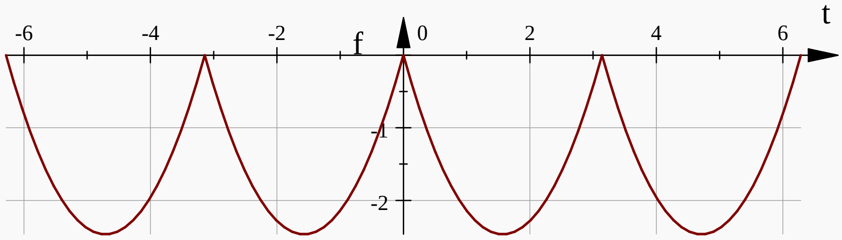
Exercice 1 (50 points) Soit la fonction $\varphi(t)$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 - \pi t & si \quad 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & si \quad ailleurs \end{cases}$$

1. Soit $f(t)$ la fonction $\pi-$périodique qui coïncide avec $\varphi(t)$ sur $[0,\pi]$
   (a) Montrer que $f(t)$ est paire.
   (b) Tracer $f(t)$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
   (c) Développer $f(t)$ en série réelle de Fourier.
   (d) Déduire la somme : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
2. Calculer $F(p)$ la transformée de Laplace de $\varphi(t)$.
3. Déduire la solution de l'équation différentielle : $y'' + 4y = \varphi(t)$.
4. Calculer $\Phi(\nu)$ la transformée de Fourier de $\varphi(t)$.

Solution 1

1. $f(t)$ est $\pi-$périodique
   (a) $f(-t) = f(-t+\pi) = (-t+\pi)^2 - \pi(-t+\pi)$
   $= t^2 - 2\pi t + \pi^2 + \pi t - \pi^2 = t^2 - \pi t = f(t)$
   donc $f(t)$ est paire. 5 points
   (b) Graphe : 3 points



   (c) $f(t)$ est paire donc $b_n = 0\ \forall n \geq 1$, $T = \pi \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ 2 points

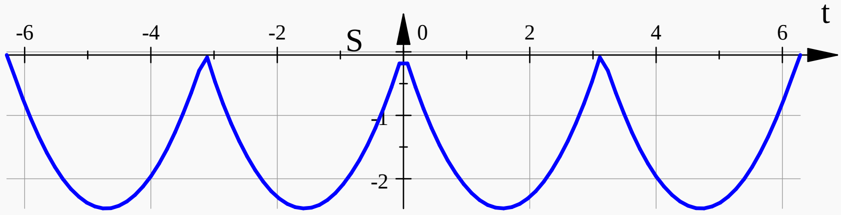
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (t^2 - \pi t)\,dt = -\frac{\pi^2}{6}$$ 3 points

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (t^2 - \pi t)\cos 2nt dt$$

$$\left\{\begin{array}{|l|l|l|}\hline t^2-\pi t & & \cos 2nt \\ \hline 2t-\pi & \searrow + & \dfrac{\sin 2nt}{2n} \\ \hline 2 & \searrow - & -\dfrac{\cos 2nt}{4n^2} \\ \hline 0 & \searrow + & -\dfrac{\sin 2nt}{8n^3} \\ \hline\end{array}\right.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left(t^2-\pi t\right)\frac{\sin 2nt}{2n} + (2t-\pi)\frac{\cos 2nt}{4n^2} - 2\frac{\sin 2nt}{8n^3}\right)_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left((2\pi-\pi)\frac{\cos 2n\pi}{4n^2} - (0-\pi)\frac{\cos 0}{4n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\boxed{7 \text{ points}}$$

$$S(t) = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2nt}{n^2}\boxed{2 \text{ points}}$$



(d) La fonction est continue au point $t=0$ donc $f(0) = S(0)$

$$0 = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\boxed{3 \text{ points}}$$

2. $F(p) = \int_0^{\pi}\left(t^2-\pi t\right)e^{-pt}dt = -\frac{1}{p^3}\left(2e^{-\pi p} + \pi p + \pi p e^{-\pi p} - 2\right) = \frac{2}{p^3} - \frac{2e^{-\pi p}}{p^3} - \frac{\pi}{p^2} - \frac{\pi e^{-\pi p}}{p^2}\boxed{5 \text{ points}}$

3. Soit $Y(p) = \mathcal{L}(y)$

$\mathcal{L}(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0)$

Soit $y(0) = a$ et $y'(0) = b$ donc $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - bp - a$

Equation image : $\mathcal{L}(y''+4y) = F(p)$

$$\Longrightarrow p^2Y - ap - b + 4Y = 2\frac{1-e^{-\pi p}}{p^3} - \pi\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2}\boxed{3 \text{ points}}$$

$$\left(p^2+4\right)Y - ap - b = 2\frac{1-e^{-\pi p}}{p^3} - \pi\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2}$$

$$Y = 2\frac{1-e^{-\pi p}}{p^3\left(p^2+4\right)} - \pi\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2\left(p^2+4\right)} + \frac{ap+b}{p^2+4}\boxed{3 \text{ points}}$$

$$= 2\frac{1-e^{-\pi p}}{p^3\left(p^2+4\right)} - \pi\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2\left(p^2+4\right)} + \frac{ap}{p^2+4} + \frac{b}{p^2+4}$$

$$\frac{p}{p^2+4} = \mathcal{L}(\cos 2t),\ \frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t)$$

$$Y_1 = \frac{1}{p^3\left(p^2+4\right)} = \frac{1}{16}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{16p} + \frac{1}{4p^3} \Longrightarrow y_1(t) = \left(\frac{1}{16}\cos 2t - \frac{1}{16} + \frac{1}{8}t^2\right)u(t)\boxed{3 \text{ points}}$$

$$Y_2 = \frac{1}{p^2\left(p^2+4\right)} = \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{4\left(p^2+4\right)} \Longrightarrow y_2(t) = \left(\frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t\right)u(t)\boxed{3 \text{ points}}$$

$$y(t) = 2y_1(t) - 2y_1(t-\pi) - \pi y_2(t) - \pi y_2(t-\pi) + a\cos 2t + \frac{b}{2}\sin 2t\boxed{3 \text{ points}}$$

Remarque

Si $y(0) = y'(0) = 0$ la solution devient :
$y(t) = 2y_1(t) - 2y_1(t-\pi) - \pi y_2(t) - \pi y_2(t-\pi)$

4. Il est plus commode de déduire La TF à partire de $F(p)$, en remplaçant p par $2j\pi\nu$:
$$\Phi(\nu) = \frac{2}{(2j\pi\nu)^3} - \frac{2e^{-2j\pi^2\nu}}{(2j\pi\nu)^3} - \frac{\pi}{(2j\pi\nu)^2} - \frac{\pi e^{-2j\pi^2\nu}}{(2j\pi\nu)^2} = j\frac{1-e^{-2j\pi^2\nu}}{4\pi^3\nu^3} + \frac{1+e^{-2j\pi^2\nu}}{4\pi\nu^2} \boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 2 (35 points) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique E par :

$$\forall v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (-a+b-c, -4a+3b-2c, 2a-b+2c)$$

avec $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f,E)$
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions.
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
4. Déduire la solution générale du système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x+y-z \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x+3y-2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x-y+2z \end{cases}$$

Solution 2

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{5 points}}$

2. $|A| = 2$ donc $rang(A) = 3$ $\boxed{\text{1 point}}$ par suite

$\ker f = \{(0,0,0)\}$ et $\dim \ker f = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dim \operatorname{Im} f = 3$ et une base est : $\{(-1,-4,2),(1,3,-1),(-1,-2,2)\}$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$\overset{C_1 \mapsto C_1+C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & -2 \\ \lambda-1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2 \mapsto L_2-L_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 \mapsto L_3+L_1}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (1-\lambda)(1)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$ $\boxed{\text{7 points}}$

$\lambda_{1,2} = 1$ est une V.P. double et $\lambda_3 = 2$ est une V.P. simple $\boxed{\text{3 points}}$

Soient v_i les vecteurs propres associées aux valeurs propres λ_i

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Longrightarrow \begin{cases} -a+b-c = a \\ -4a+3b-2c = b \\ 2a-b+2c = c \end{cases} \Longleftrightarrow c = 2a-b$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soient donc deux vecteurs de base $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_3 = 2$$

$$Av_2 = \lambda_3 v_3 \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta-\gamma = 2\alpha \\ -4\alpha+3\beta-2\gamma = 2\beta \\ 2\alpha-\beta+2\gamma = 2\gamma \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3\alpha+\beta-\gamma = 0 & (1) \\ -4\alpha+\beta-2\gamma = 0 & (2) \\ 2\alpha-\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \Longrightarrow \beta = 2\alpha \\ (1) \Longrightarrow \gamma = -\alpha \end{cases} \Longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \text{ soit } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$

4. Le système s'écrit : $Y' = AY$

La matrice A est diagonalisable alors la solution générale est $Y = \sum_{i=1}^{3} C_i V_i e^{\lambda_i t}$

$$Y = \left(C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) e^t + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \boxed{\text{5 points}}$$

Soit

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_3 e^{2t} \\ y(t) &= C_2 e^t + 2C_3 e^{2t} \\ z(t) &= (2C_1 - C_2) e^t - C_3 e^{2t} \end{aligned} \boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 3 (15 points) Soit A une matrice carrée nilpotente d'ordre 3 et B la matrice définie par $B = A - 2I$ calculer en fonction de A la matrice e^{Bt}, où I est la matrice identité d'ordre 3 et t une réelle.

Solution 3

$e^{Bt} = e^{(A-2I)t} = e^{At}e^{-2It}$ $\boxed{\text{2 points}}$

It est une matrice diagonale donc $e^{-2It} = Ie^{-2t}$ $\boxed{\text{3 points}}$

A est nilpotente d'ordre 3 alors $e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2$ $\boxed{\text{5 points}}$

par suite : $e^{Bt} = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2\right) e^{-2t}$ $\boxed{\text{5 points}}$