Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Examen Final 2005-2006 Semestre II
Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Documents autorisés: Livre du cours **Durée : 3 h**

Exercice 1 *Soit* $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un champ* C^1 $\overrightarrow{F}(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$ *soit:*

$$h(x,y) = \int_0^1 [xf(tx,ty) + yg(tx,ty)]dt$$

1. Montrer que si $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial v}$ alors $\overrightarrow{F}(x,y) = \overrightarrow{\text{grad}} h(x,y)$
2. En déduire un potentiel pour $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy, x^2 + y)$
3. Généraliser ce résultat à $\mathbb{R}^n$, avec:

$$\overrightarrow{F}(u) = (F_1(u), ..., F_n(u)) \text{ et } h(x) = \int_0^1 \overrightarrow{F}(tx)xdt \text{ et } \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial F_j}{\partial u_i} \forall i,j = 1, ..., n$$

Exercice 2 *Calculer le volume limité par:*
le plan oxy, *le paraboloide elliptique* $2z = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q}$ $(q,p > 0)$ *et le cylindre* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Par un calcul directe, et en appliquant la formule de Green.

Exercice 3 *la courbe* C *est définit par les deux équations:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$y + z = a (a > 0)$$

est orientée de telle sorte que sa projection sur le plan oxy soit orienté dans le sens positif.
Calculer par application de la formule de stokes, l'intégrale: $\int_C ydx + zdy + xdz$

Exercice 4 *Soit l'ensemble* $\mathbb{F} = \{(x,y,z); 2x - 3y - z = 0\}$ *une partie de* $\mathbb{R}^3$

1. Démontrer que $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base$\{u,v\}$ de $\mathbb{F}$
2. Donner les composantes du vecteur $w = (1,1,-1)$ dans cette base .
3. Calculer les composantes du vecteur $Y = 2u - 3v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 *On considère la matrice* $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \lambda \\ 1 & -1+\lambda & 1 \\ 1 & -2+\lambda & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs λ_n de λ pour les quelles M_λ est singulière.
2. Calculer le polynôme caractéristique de M_λ et déduire l'expression de la matrice inverse pour une valeur quelconque de λ.
3. Calculer si c'est possible M_0^{-1}.
4. Soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_λ dans la base canonique . Déterminer l'image par f_λ d'un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
5. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f_0
6. Déduire la solution du système diffèrentiel $X' = M_0 X$; $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Exercice 6 *On notera* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* I *la matrice unité d'ordre* 3. *Soit* a, b, c *et* k *quatre nombres réels tels que* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ *et* $k \neq 0$, *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *représenté par rapport à* E *par la matrice*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer T^2, puis exprimer T^3 en fonction de T. Montrer que T n'est pas inversible
2. Déterminer $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$
3. Montrer que la matrice $B = kI + T$ est inversible et que l'on a $B^{-1} = \alpha I + \beta T + \gamma T^2$ Où α, β, γ sont trois nombres réels qu'on exprimera en fonction de k En déduire que B^{-1} et $kI - T$ commutent

   Soit g *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *qui a pour matrice* $A_k = B^{-1}(kI - T)$ *par rapport à la base canonique de* $\mathbb{R}^3$
4. Quels sont les vecteurs V tels que $g(V) = V$
5. Donner une expression de A_k en fonction de k, I, T, T^2