Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Examen partiel 2005-2006 Semestre II
Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Documents autorisés: Livre du cours **Durée : 1 h 30**

Exercice 1 *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *sur* $\mathbb{R}$, *et soit*
$\mathbb{F} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3;\ a+b+c=0\}$

1. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer une base de $\mathbb{F}$

Exercice 2 *Soit* φ *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to \varphi(x,y,z) = (x+y-2z, x-2y+z, -2x+y+z)$$

1. Déterminer la matrice A de φ relativement à la base canonique $E = \{e_1, e_2, e_3\}$
2. Montrer que $F = \{f_1 = (0,0,1), f_2 = (0,1,1), f_3 = (1,1,1)\}$ est une base $\mathbb{R}^3$
3. Déterminer les matrices de passage: (P) de E vers F et (Q) de F vers E exprimer Q en fonction de P
4. Déduire la matrice B de φ relativement à la base F
5. Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$ en précisant les bases.
6. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A
7. Déduire la solution du système différentiel:

$$(S) = \begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) - 2z(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t) + z(t) \\ z'(t) &= -2x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$