Université libanaise
Institut des Sciences Appliquées et Economiques

Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)
Examen 2éme session 2005-2006

Documents autorisés: Livre du cours **Durée : 3 h**

Exercice 1 *Vérifier le théorème de Green dans les cas suivants:*

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 < 1\}, \vec{F}(x, y) = (-x^2y, xy^2)$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0$ et $x^2 + y^2 < 1\}, \vec{F}(x, y) = (\frac{x}{2(1 + x^2 + y^2)}, \varphi(y))$ avec $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$

Exercice 2 *soit* $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [a, b]\}$ *montrer que*

1. $longueur(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$
2. en déduire la longueur de la courbe $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x \in [0, 1]$
3. soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = r(t)\cos(t), y(t) = r(t)\sin(t), t \in [a, b]\}$ calculer la longueur de Γ en fonction de r

Exercice 3 *soit* $x \in R^n$ *et* $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$

1. montrer que si $f(x) = \Psi(r)$ alors pour $x \neq 0, \Delta f = \Psi''(r) + \frac{n-1}{r}\Psi'(r)$
2. déduire une solution de $\Delta f = 0$

Exercice 4 *Soit* $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ *et* $S = \{(x, y, z) \in R^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$. *calculer le flux de* $\vec{F}$ *passant par* S *dans la direction ascendante* $(z > 0)$.

Exercice 5 *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *sur le corps commutatif* $\mathbb{R}$ *on défini l'application:*

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$$

1. Vérifier que T est linéaire.
2. Donner la matrice (A) associée à T dans la base canonique (E)
3. Déterminer $\operatorname{Im} T$ et $\ker T$, donner des bases
4. Monter que $F = \{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Trouver les composantes d'un vecteur $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ suivant la base F

6. Déterminer $T(v)$ relativement à la base F. En déduire la matrice B de T relativement à la base F.

Exercice 6 *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P(X)$ de A; Vérifier que $P(A) = 0$ et en déduire la matrice inverse de A
2. Utiliser les résultats précédents pour calculer: $A^2, A^3, A^4,\ A^{-2}$
3. Résoudre le système linéaire suivant:
   $x + 2y + 3z = 10$
   $2y + 3z = 7$
   $3z = 3$
4. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A
5. On désigne par Q la matrice de passage de la base canonique vers la base constituée par les vecteurs propres de A Déterminer le polynomôme caractéristique de Q et déterminer Q^{-1}
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$; $A^n = QD^nQ^{-1}$, où D est la matrice diagonale semblable à A. Calculer A^n.
7. Résoudre le système différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 3z$$
$$\frac{dy}{dt} = 2y + 3z$$
$$\frac{dz}{dt} = 3z$$