Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

# Algèbre linéaire et géométrie

**Examen Final 2006-2007** **Semestre II**

Mardi le 17 juillet 2007

**Documents autorisés: Livre du cours** **Durée : 16h30 → 19h30**

**Exercice 1** *On considère les matrices:* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* $A^2$, $A^3$ *et en déduire* $A^n$.

   ***Réponse :*** $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

   $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A \Longrightarrow A^n = A$

   *Supposant que* $A^n = A \Longrightarrow A^{n+1} = A^n \times A = A \times A = A^2 = A$

   *Donc* $A^n = A \ \forall n \in \mathbb{N}$ ■

2. *Calculer* $B^2, B^3$ *et en déduire* $B^n$

   ***Réponse :*** $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix} = B \Longrightarrow B^n = B$ ■

3. *Calculer* $AB$ *et exprimer* $(AB)^2$ *en fonction de* $AB$

   ***Réponse :*** $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -j \\ 1 & -1 & -j \\ j & -j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+j & -2-j & 1-2j \\ 3+2j & -3-2j & 2-3j \\ -1 & 1 & j \end{pmatrix}$

   $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 2+j & -2-j & 1-2j \\ 3+2j & -3-2j & 2-3j \\ -1 & 1 & j \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2-j & 2+j & -1+2j \\ -3-2j & 3+2j & -2+3j \\ 1 & -1 & -j \end{pmatrix}$ ■

4. *La matrice* $A$ *est-elle inversible?*

   ***Réponse :*** $\det(A) = 0$ *donc* $A$ *n'est pas inversible* ■

5. *Soit* $N = A + 2I$ *où* $I$ *est la matrice unitaire*

   ***Réponse :*** $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ■

(a) *Calculer* $\det(N)$ *et adj* $(N)$

**Réponse :** $\det(N) = \det\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 18$

$adj\,(N) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -12 & 12 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ ■

(b) *Déduire* $N^{-1}$.

**Réponse :** $N^{-1} = \dfrac{1}{\det(N)} adj\,(N) = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -12 & 12 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ ■

6. *Déduire la solution du système:* $\begin{cases} 5x - y + z = 2 \\ 4x + y + 2z = 2 \\ y - 2x + 2z = 1 \end{cases}$

**Réponse :** *Le système s'écrit:* $NX = B$ *avec* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

*Donc la solution est* $X = N^{-1}B = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -12 & 12 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\left[x = \dfrac{1}{6}, y = -\dfrac{1}{3}, z = \dfrac{5}{6}\right]$ ■

**Exercice 2** *Le champ vectoriel* $\overrightarrow{H} = xy\,\overrightarrow{i} - 2\left(y - z^2\right)\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ *est définie et continue sur la courbe* $(C)$ *telle que:*

$\forall M(x,y,z) \in (C)$ *on a :* $\overrightarrow{OM} = (1+t)\,\overrightarrow{i} + (1-t^2)\,\overrightarrow{j} + at^2\,\overrightarrow{k}$ *où* $t$ *est un paramètre,*

1. $\overrightarrow{H}$ *est-il un champ de gradient?Justifier votre réponse*

   **Réponse :** $\dfrac{\partial xy}{\partial y} = x \neq \dfrac{\partial\left(-2\left(y - z^2\right)\right)}{\partial x} = 0$

   *ou* $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -4z\,\overrightarrow{i} - x\,\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$

   *donc* $\overrightarrow{H}$ *n'est pas un champ de gradient* ■

2. $\overrightarrow{H}$ *est-il un champ de rotationnel?Justifier votre réponse*

   **Réponse :** $\overrightarrow{\nabla}\cdot\,\overrightarrow{H} = y - 1 \neq 0$ *donc* $\overrightarrow{H}$ *n'est pas un champ de rotationnel* ■

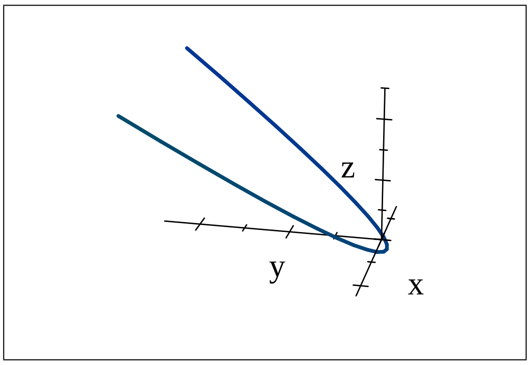
3. *Calculer le travail effectué par* $\overrightarrow{H}$ *le long de la courbe* $(C)$ *en allant du point* $A(0,0,a)$ *vers le point* $B(3,-3,4a)$.

   **Réponse :** $W = \displaystyle\int_{AB} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = (1+t)\,\overrightarrow{i} + (1-t^2)\,\overrightarrow{j} + at^2\overrightarrow{k} \Longrightarrow \overrightarrow{dr} = \left(\overrightarrow{i} - 2t\overrightarrow{j} + 2at\overrightarrow{k}\right)dt$

$\overrightarrow{H} = xy\overrightarrow{i} - 2\,(y - z^2)\,\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = (1+t)\,(1-t^2)\,\overrightarrow{i} - 2\,(1 - t^2 - a^2t^4)\,\overrightarrow{j} + at^2\overrightarrow{k}$

$= (-t^3 - t^2 + t + 1)\,\overrightarrow{i} - 2\,(1 - t^2 - a^2t^4)\,\overrightarrow{j} + at^2\overrightarrow{k}$




$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = [(-t^3 - t^2 + t + 1) + 4t\,(1 - t^2 - a^2t^4) + 2a^2t^3]\,dt$

$= (-4a^2t^5 + 2a^2t^3 - 5t^3 - t^2 + 5t + 1)\,dt$

*Au point* $A\,(1,1,0)$ *on a* $t = 0$ *et au point* $B\,(2,0,a)$ : $t = 1$

$$W = \int_{AB} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^1 (-4a^2t^5 + 2a^2t^3 - 5t^3 - t^2 + 5t + 1)\,dt = \frac{23}{12} - \frac{1}{6}a^2 \quad \blacksquare$$

4. *Calculer la charge totale de* $AB$ *si la densité linéique est* $\lambda = x - 1$

***Réponse :*** $Q = \int_{AB} \lambda d\ell$

$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 4a^2t^2}dt = \sqrt{1 + 4\,(1 + a^2)\,t^2}dt$

$\lambda = x - 1 = 1 + t - 1 = t$

$Q = \int_0^1 t\sqrt{1 + 4\,(1 + a^2)\,t^2}dt$

*Posons* $u = 1 + 4\,(1 + a^2)\,t^2 \Longrightarrow du = 8\,(1 + a^2)\,tdt \Longrightarrow tdt = \dfrac{du}{8\,(1 + a^2)}$

$t = 0 \rightarrow u = 1$ *et* $t = 1 \rightarrow u = 5 + 4a^2$

$$Q = \int_1^{5+4a^2} \frac{\sqrt{u}du}{8\,(1 + a^2)} = \frac{(4a^2 + 5)\,\sqrt{4a^2 + 5} - 1}{12\,(a^2 + 1)}$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{u}du}{8\,(1 + a^2)} = \frac{u\sqrt{u}}{12\,(a^2 + 1)}} \quad \blacksquare$$

**Exercice 3** *On considère dans* $\mathbb{R}^3$ *sur* $\mathbb{R}$ *l'endomorphisme*

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad f\,(x,y,z) = (x + 2y + 2z, 2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$$

*relativement à la base canonique* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

1. *Déterminer la matrice* $A = M(f, E)$

   ***Réponse :*** $f(x,y,z) = (x+2y+2z, 2x+y+2z, 2x+2y+z)$

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ■

2. *Déduire l'image du vecteur* $u = 3e_1 - 2e_2 + 7e_3$

   ***Réponse :*** $f(u) = Au = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$ ■

3. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de* $f$

   ***Réponse :*** *Equation caractéristique:* $(\lambda - 5)(\lambda+1)^2 = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$

   *Les valeurs propres sont* $\lambda_1 = -1$ *(double)* *et* $\lambda_2 = -5$ *(simple)*

   *Les vecteurs propres sont:*

   $\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \lambda_1 = -1, \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 5$ ■

4. *Calculer* $A^8$

   ***Réponse :*** *La matrice de passage de la base canonique vers la base propre est*

   $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   *la matrice* $A$ *est diagonalisable et semblable à* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

   $A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^8 = PD^8P^{-1}$

   $= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^8 \left(\dfrac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} 130\,209 & 130\,208 & 130\,208 \\ 130\,208 & 130\,209 & 130\,208 \\ 130\,208 & 130\,208 & 130\,209 \end{pmatrix}$ ■

5. *Déduire la solution du système différentiel:*

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 2z$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y + 2z$$
$$\frac{dz}{dt} = 2x + 2y + z$$

***Réponse :*** $X=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $X'=\dfrac{dX}{dt}\Longrightarrow X'=AX$

*La solution est de la forme:*

$$X=\sum_i C_iV_i\exp(\lambda_it)=(C_1V_1+C_2V_2)\exp(\lambda_1t)+C_3V_3\exp(\lambda_2t)$$

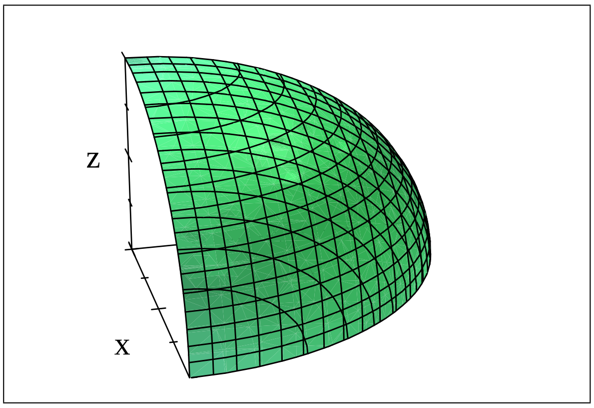
$$=\left(C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\exp(-t)+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\exp(5t)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= (-C1-C_2)e^{-t}+C_3e^{5t} \\ y(t) &= C_1e^{-t}+C_3e^{5t} \\ z(t) &= C_2e^{-t}+C_3e^{5t} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Exercice 4** *Dans l'espace rapporté au système d'axes $(Oxyz)$ on considère le surface sphérique:*

$$S=\left\{M(x,y,z)\,;\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}$$

*Soit* $\overrightarrow{V}=xy^2\overrightarrow{i}+yz^2\overrightarrow{j}+zx^2\overrightarrow{k}$ *un champ vectoriel définie et continue sur* $(S)$




1. *Calculer* div $\overrightarrow{V}$ *et* $\overrightarrow{rot\overrightarrow{V}}$

   ***Réponse :*** div $\overrightarrow{V}=x^2+y^2+z^2$

   $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}=-2\left(yz\overrightarrow{i}+xz\overrightarrow{j}+xy\overrightarrow{k}\right)$ $\blacksquare$

2. *Calculer le flux de* $\overrightarrow{V}$ *sortant de* $(S)$ :

   (a) *à l'aide d'une intégrale de surface*

   ***Réponse :*** $\Phi=\displaystyle\iint_S\overrightarrow{V}.\overrightarrow{n}\,ds$

   *La surface $(S)$ est la surface fermée constituée par la partie du sphère et les plans des coordonnées* *sur la zone sphérique:*

$\overrightarrow{n_1} = \pm\frac{1}{a}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right)$

$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}_1 = \pm\left(xy^2\overrightarrow{i} + yz^2\overrightarrow{j} + zx^2\overrightarrow{k}\right) \cdot \frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{a} = \pm\frac{1}{a}\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right)$

*en coordonnées sphériques:*

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\varphi\sin\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ \quad z = a\cos\theta \end{array}\right. \quad ds = a^2\sin\theta d\varphi d\theta \quad \text{et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};\ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n_1} = \pm\frac{1}{a}\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right)$

$= \pm\frac{1}{a}\left((a\cos\varphi\sin\theta)^2(a\sin\varphi\sin\theta)^2 + (a\sin\varphi\sin\theta)^2(a\cos\theta)^2 + (a\cos\theta)^2(a\cos\varphi\sin\theta)^2\right)$

$= \pm a^3\left(\cos^2\varphi\sin^4\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\theta\right)$

$= \pm a^3\left(\cos^2\varphi\sin^4\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\right)$

$= \pm a^3\left(\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta\right)$

$$\Phi_1 = \pm a^5\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta\right)\sin\theta d\varphi\right)d\theta = \pm\frac{1}{10}\pi a^5$$

*Sur le plan xoy :* $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{\pm k} \Longrightarrow \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}_2 = \pm\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{k} = \pm zx^2$

*Or sur xoy on a* $z = 0$ *donc* $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}_2 = 0$ *et* $\Phi_2 = 0$

*Sur le plan xoz :* $\overrightarrow{n_3} = \pm\overrightarrow{j} \Longrightarrow \pm\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{j} = \pm yz^2$

*sur xoz on a* $y = 0$ *donc* $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}_3 = 0$ *et* $\Phi_3 = 0$ *et de même sur yoz* $\Phi_4 = 0$

*donc finalement* $\Phi = \pm\frac{\pi a^5}{10}$ ■

(b) *à l'aide d'une intégrale triple*

***Réponse :*** $\Phi = \pm\iiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} dxdydz$

$= \pm\iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ \quad z = r\cos\theta \end{array}\right. \Longrightarrow dxdydz = r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$$

$0 \leq r \leq a$ ; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Phi = \pm\iiint_\Delta r^4\sin\theta drd\varphi d\theta = \pm\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a r^4\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi = \pm\frac{\pi a^5}{10} \quad ■$$

3. *La densité de masse au point* $M \in (S)$ *est* $\sigma = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. *Calculer la masse totale de* $(S)$

***Réponse :*** $m = \iint\limits_S \sigma ds = \iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ■

(a) ***Réponse :*** *en coordonnées sphériques:*

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = a^2 \Longrightarrow \sigma = \frac{1}{a}$$

$$ds = a^2\sin\theta d\varphi d\theta \quad et\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};\ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$m = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \frac{\pi}{2a} \ ■$$

4. *Déterminer le centre de gravité de* $(S)$

***Réponse :*** *Soit* $G\,(x_G, y_G, z_G)$ *le centre de gravité de* $S$.

$$\alpha_G = \frac{1}{m}\iint\limits_S \alpha\sigma ds \quad avec\ \alpha = x, y, z$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\sigma ds = \frac{1}{m}\iint\limits_S \frac{xds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2a}{\pi}\iint\limits_S \frac{(a\cos\varphi\sin\theta)\,a^2\sin\theta d\varphi d\theta}{\sqrt{a^2}}$$

$$= \frac{2a^3}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin^2\theta d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^3$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\sigma ds = \frac{1}{m}\iint\limits_S \frac{yds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2a}{\pi}\iint\limits_S \frac{(a\sin\varphi\sin\theta)\,a^2\sin\theta d\varphi d\theta}{\sqrt{a^2}}$$

$$= \frac{2a^3}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\sin^2\theta d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^3$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iint\limits_S z\sigma ds = \frac{1}{m}\iint\limits_S \frac{zds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2a}{\pi}\iint\limits_S \frac{(a\cos\theta)\,a^2\sin\theta d\varphi d\theta}{\sqrt{a^2}}$$

$$= \frac{2a^3}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^3 \ ■$$

5. *Caculer le moment cinétique de* $(S)$ *par rapport à l'axe* $oz$ *et par rapport à l'origine de coordonées*

***Réponse :*** $I = \iint\limits_S r^2\sigma ds = \iint\limits_S a^2\sigma ds = a^2\iint\limits_S \sigma ds = a^2 m = \frac{\pi a}{2}$ ■

6. *On désigne par* $(C)$ *la courbe frontière de* $(S)$. *Calculer par deux méthodes différentes* $\oint\limits_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr}$

***Réponse :*** $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = xy^2dx + yz^2dy + zx^2dz$

***Par calcul direct:***

*La courbe frontière de* $(S)$ *est constituée par les arcs de cercles dans les plans de coordonnées:* $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

*Sur* $(C_1)$ *dans* $(xoy)$ : $x^2 + y^2 = a^2$ *et* $z = 0, dz = 0$

*en coordonnées polaires:* $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ z = a\sin\theta \end{cases}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = xy^2dx = a\cos\theta\,(a\sin\theta)^2\,(-a\sin\theta d\theta) = -a^4\cos\theta\sin^3\theta d\theta \quad \textit{avec } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{C_1} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = -a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin^3\theta d\theta = -\frac{1}{4}a^4$$

*Sur* $(C_2)$ *dans* $(xoz)$ $x^2 + z^2 = a^2$; $y = 0, dy = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = zx^2dz$

*en coordonnées polaires:* $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ z = a\sin\theta \end{cases}$

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = zx^2dz = (a\sin\theta)\,(a\cos\theta)^2\,(a\cos\theta)\,d\theta = a^4\sin\theta\cos^3\theta d\theta$$

*La courbe est decrivée dans le sens positif donc* $\theta$ *varie de* $\frac{\pi}{2}$ *à* $0$

$$\int\limits_{C_2} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = a^4 \int\limits_{\pi/2}^{0} \cos^3\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{4}a^4$$

*Sur* $(C_3)$ *dans* $(yoz)$ $y^2 + z^2 = a^2$; $x = 0, dx = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = yz^2dy$

*en coordonnées polaires:* $\begin{cases} y = a\cos\theta \\ z = a\sin\theta \end{cases}$

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = yz^2dy = (a\cos\theta)\,(a\sin\theta)^2\,(-a\sin\theta d\theta)$$

$$\int\limits_{C_3} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = -a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin^3\theta d\theta = -\frac{1}{4}a^4$$

$$\oint\limits_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{C_1} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{C_2} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} + \int\limits_{C_3} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr}$$

$$= -\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{4}a^4 = -\frac{3}{4}a^4$$

*Par le théorème de Stokes:* $\oint\limits_C \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_S \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds}$

$$\oint_C \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = \iint_S \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{ds} = \iint_S \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n}\,ds$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n} = -2\left(yz\overrightarrow{i}+xz\overrightarrow{j}+xy\overrightarrow{k}\right)\cdot\frac{x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}}{a}$$

$$= \frac{-2}{a}\left(xyz+xyz+xyz\right) = \frac{-6xyz}{a}$$

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow xyz = \left(a\cos\varphi\sin\theta\right)\left(a\sin\varphi\sin\theta\right)\left(a\cos\theta\right) = a^3\cos\theta\cos\varphi\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$ds = a^2\sin\theta d\varphi d\theta \quad et\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2};\ \ 0\le\varphi\le$$

$$\oint_C \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = -6a^4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin^3\theta d\theta\right)d\varphi = -\frac{3}{4}a^4 \ \ \blacksquare$$