Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Final 2007-2008 **Semestre II**

\+ Solutions

Exercice 1 ***On considère la fonction*** $f(x,t) = \sin n\pi x \cos nc\pi t$ ***où*** n ***et*** c ***sont deux constantes données. Montrer que***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Solution 1 *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = n\pi \cos n\pi x \cos n\pi ct \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -n^2\pi^2 \sin n\pi x \cos n\pi ct$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -nc\pi \sin n\pi x \sin n\pi ct \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -n^2c^2\pi^2 \sin n\pi x \cos n\pi ct$$

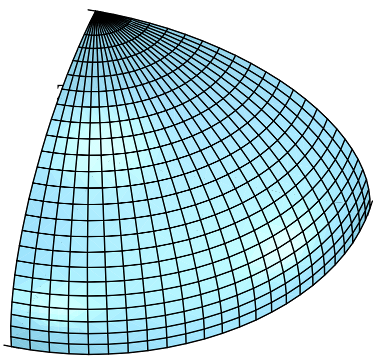
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -n^2\pi^2 \sin n\pi x \cos n\pi ct = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Exercice 2 ***Dans l'espace rapporté aux système d'axes*** $Oxyz$, ***on considère la surface*** (S) ***portion de la sphère centrée à l'origine et de rayon*** R, ***telle que*** $x \geq 0$, $y \geq 0$ ***et*** $z \geq 0$.

1. **On suppose que** (S) **est non homogène avec une densité de masse** $\sigma(x,y,z) = xyz$**. Calculer la masse totale de** (S).

2. **Calculer le flux du champ** $\overrightarrow{H} = yz\,\overrightarrow{i} + xz\,\overrightarrow{j} + xyz\,\overrightarrow{k}$ **à travers** (S).

Solution 2 *:*



1. $m = \iint\limits_S \sigma ds = \iint\limits_S xyzds$

   En coordonnées sphériques $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ avec $\begin{array}{l} r = R \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{array}$ et $ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

   $$m = \iint\limits_S (R\cos\varphi\sin\theta)(R\sin\varphi\sin\theta)(R\cos\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

   $$= R^5 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\sin^3\theta\cos\theta d\theta \right) d\varphi = R^5 \left. \frac{\sin^2\varphi}{2} \right|_0^{\pi/2} \left. \frac{\sin^4\theta}{4} \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} R^5$$

2. (S) est une surface sphérique donc en tout point $M(x, y, z)$ la normale unitaire est $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \right)$

   $$\Phi = \iint\limits_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} ds$$

   $$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \left(yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xyz\overrightarrow{k} \right) \cdot \frac{1}{R}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \right) = \frac{3xyz}{R}$$

   $$\Phi = \iint\limits_S \frac{3xyz}{R} ds = \frac{3}{R} \iint\limits_S xyzds = \frac{3m}{R} = \frac{3}{R}\left(\frac{1}{8}R^5 \right) = \frac{3}{8}R^4.$$

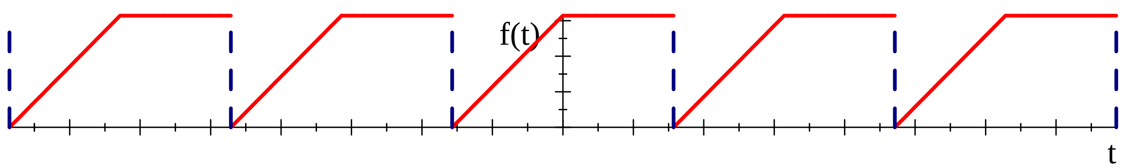
Exercice 3 ***On considère la fonction*** $2\pi-$***périodique définie sur*** $]-\pi, \pi[$ ***par :***

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & si \ -\pi < t \leq 0 \\ \pi & si \ 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

1. **Tracer le graphe de** $f(t)$ **sur l'intervalle** $]-5\pi, 5\pi[$
2. **Calculer les coefficients et la série de Fourier associés à** $f(t)$
3. **Déduire la somme:** $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

Solution 3 *:*

1. Graphe:



2. $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(t+\pi)\,dt + \int\limits_{0}^{\pi}\pi dt\right) = \frac{3}{4}\pi$

   $T = 2\pi \Longrightarrow \omega = 1$

   $a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(t+\pi)\cos nt dt + \int\limits_{0}^{\pi}\pi\cos nt dt\right) = -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$

   $a_n = \begin{cases} 0 & si\ n = 2k \\ \dfrac{2}{\pi(2k+1)^2} & si\ n = 2k+1 \end{cases}$

   $b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(t+\pi)\sin nt dt + \int\limits_{0}^{\pi}\pi\sin nt dt\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\left((-1)^n - 1\right)\right) = -\frac{(-1)^n}{n}$

   $S(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2\cos(2k+1)t}{\pi(2k+1)^2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nt}{n}$

3. $S(0) = \frac{3\pi}{4} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2} = f(0) = \pi$

   $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2} = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{4}\pi \Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Exercice 4 ***On considère les fonctions***

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 < t < 1 \\ -1 & si\ \ 2 < t < 3 \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \qquad et\ \ u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 1 & si\ \ t > a \\ 0 & si\ \ t < a \end{cases}$$

1. **Tracer le graphe de $f(t)$ et préciser les points de discontinuité.**

2. **Calculer, par intégration, la transformée de Laplace de $f(t)$.**

3. **Exprimer $f(t)$ à l'aide de l'échelon unité $u_a(t)$ et retouver sa transformée de Laplace.**

4. **Soit la fonction**

$$H_\alpha(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p^3 - p^2 - 6p}$$

   la transformée de Laplace de la fonction $h_\alpha(t)$. Déterminer $h_\alpha(t)$.

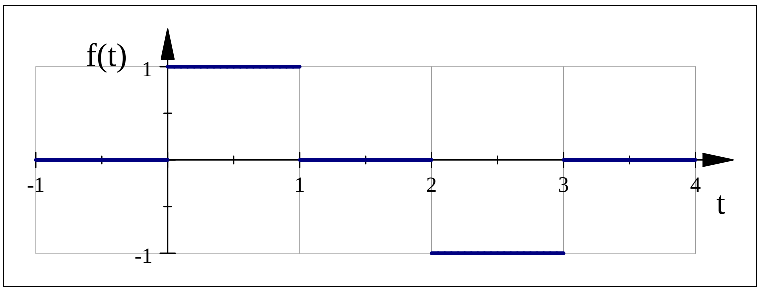
5. **En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation différentielle:**

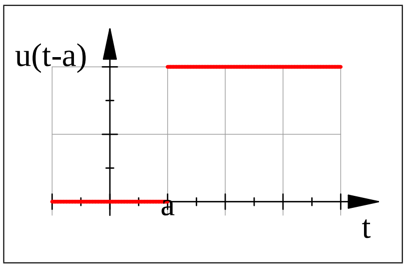
$$y'' - y' - 6y = f(t)$$

   sachant que $y'(0) = y(0) = 0.$

Solution 4 *:*

1. Graphes





les points de discontinuités: $t = 0, 1, 2$ et 3

2. $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt = \int\limits_0^1 e^{-pt} dt - \int\limits_2^3 e^{-pt} dt$

$$= -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^1 + \left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_2^3 = -\frac{1}{p}\left(e^{-p} - 1\right) + \frac{1}{p}\left(e^{-3p} - e^{-2p}\right) = \frac{e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1}{p}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \quad \rightarrow u(t) - u(t-1) \\ -1 & \text{si} \quad 2 < t < 3 \quad \rightarrow -\left(u(t-2) - u(t-3)\right) \end{cases}$$

3. $f(t) = u(t) - u(t-1) - u(t-2) + u(t-3)$

La transformée de Laplace de $u(t-a)$ est $U_a(P) = \dfrac{e^{-ap}}{p}$

Donc $F(p) = U_0(p) - U_1(p) - U_2(p) + U_3(p)$

$$F(p) = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$$

4. $H_0(p) = \dfrac{1}{p^3 - p^2 - 6p} = \dfrac{1}{p\left(p^2 - p - 6\right)}$

Les racines de $p^2 - p - 6 = 0$ sont 3 et $-2 \Longrightarrow p^2 - p - 6 = (p+2)(p-3)$

$$H_0(p) = \frac{1}{p(p+2)(p-3)} = \left(\frac{1}{10(p+2)} + \frac{1}{15(p-3)} - \frac{1}{6p}\right)$$

$$h_0(t) = \left(\frac{e^{-2t}}{10} + \frac{e^{3t}}{15} - \frac{1}{6}\right) u(t)$$

$$h_\alpha(t) = \left(\frac{e^{-2(t-\alpha)}}{10} + \frac{e^{3(t-\alpha)}}{15} - \frac{1}{6}\right) u(t-\alpha)$$

5. $y'' - y' - 6y = f(t) \Longrightarrow \pounds(y'') - \pounds(y') - 6\pounds(y) = \pounds(f)$

soit $Y = \pounds(y)$

$\pounds(y') = pY - y(0) = pY$

$\pounds(y'') = p^2 Y - py(0) - y'(0) = p^2 Y$

En remplaçant, on obtient:

$$p^2Y - pY - 6Y = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$$

$$\left(p^2 - p - 6\right) Y = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$$

$$Y = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p\left(p^2 - p - 6\right)} = H_0\left(p\right) - H_1\left(p\right) - H_2\left(p\right) + H_3\left(p\right)$$

$$y\left(t\right) = h_0\left(t\right) - h_1\left(t\right) - h_2\left(t\right) + h_3\left(t\right)$$

Exercice 5 ***Soit le champ vectoriel*** $\overrightarrow{H} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ ***où*** $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ ***;*** $M\left(x, y, z\right)$ ***et*** $r = \left|\overrightarrow{r}\right|$

1. **Montrer que** $\overrightarrow{H}$ **dérive d'un potentiel scalaire** $\varphi = \varphi\left(x, y, z\right)$. **Déterminer** φ.
2. **Calculer le travaille effectué par** $\overrightarrow{H}$ **le long de la courbe** (C) **joigant les points** $A\left(1, 0, 0\right)$ **et** $B\left(1, 1, 1\right)$
3. **Calculer le flux** (Φ)**de** $\overrightarrow{H}$ **à travers la sphère** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
4. **Calculer l'angle solide sous lequel on peut voir la sphère tout entière à partir du centre** (O).

Solution 5 *:*

1. $\overrightarrow{H} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3} = \dfrac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}\right) = \frac{-3xy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}\right) = \frac{-3xy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

de même on trouve $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}$

donc $\overrightarrow{H}$ dérive d'un potentiel scalaire

$$P = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Longrightarrow \varphi = \int \frac{xdx}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$$

on a $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ donc $dr = \frac{1}{2} \times 2x \times (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\, dx = \frac{xdx}{r}$

Par suite $xdx = rdr$

$\Longrightarrow \varphi = \int \frac{xdx}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = \int \frac{rdr}{r^3} = \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r} + f\,(y, z)$

$Q = \frac{y}{r^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow f = f\,(z) \Longrightarrow \varphi = -\frac{1}{r} + f\,(z)$

$R = \frac{z}{r^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial f}{\partial z}$

$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Longrightarrow f = Const = C$

$$\varphi = -\frac{1}{r} + C$$

2. $W = \int\limits_{AB} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$

   $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\text{grad}\,\varphi} \Longrightarrow \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = d\varphi$

   $\Longrightarrow W = \int\limits_{AB} d\varphi = \varphi\,(B) - \varphi\,(A)$

   $r_A = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1,\ r_B = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$

   $W = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + C\right) - (-1 + C) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$

3. $\Phi = \iint\limits_{S} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$

   $\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r}}{R} \Longrightarrow \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{R} = \frac{r^2}{Rr^3} = \frac{1}{Rr}$

   mais sur la surface sphérique: $r = R$ donc $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{1}{R^2}$

   $\Phi = \iint\limits_{S} \frac{1}{R^2} ds = \frac{1}{R^2} \iint\limits_{S} ds = \frac{S}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$

4. l'angle solide sous lequel on peut voir la sphère à partir du point (O) est égal au flux du champ $\overrightarrow{H}$ donc $\Omega = 4\pi$