Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Algèbre linéaire et géométrie

Examen test 2007-2008 **Semestre II**

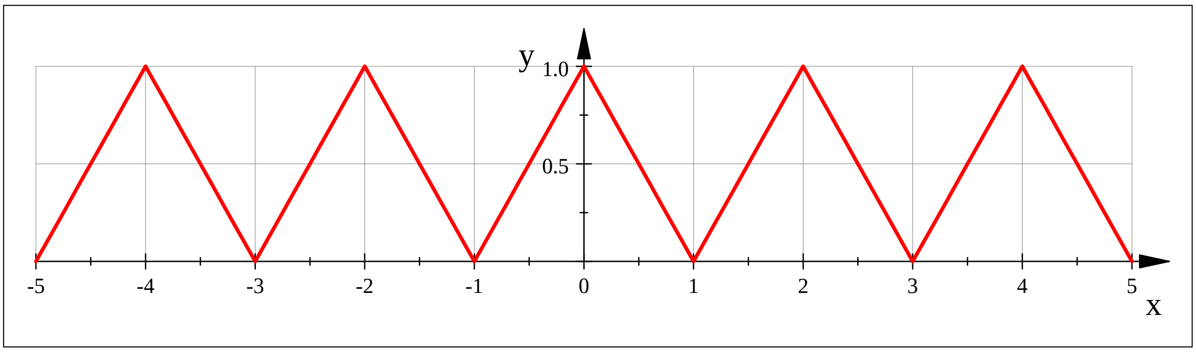
Lundi 2 juin 2008

Documents autorisés: Livre du cours **Durée : 19 : 00 → 21 : 00**

Exercice 1 ***On considère la fonction périodique*** $f(t)$ ***définie sur*** $[-1, 1]$ ***par:***

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & si \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & si \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1. **Tracer le graphe de** $f(t)$ **sur**



2. **Montrer que** $f(t)$ **est une fonction paire**

   Le graphe a une symétrie par rapport à l'axe ox donc la fonction est paire.

   dans l'intervalle $[-1, 0]$ on a $f(t) = 1 + t$

   dans l'intervalle $[0, 1]$ on a $f(-t) = 1 + (-t) = 1 + t = f(t)$

   donc $f(t)$ est paire.

3. **Calculer la série réelle de Fourier associée à** $f(t)$

   $f(t)$ est paire donc $b_n = 0$

   $T = 2 \Longrightarrow \omega = \pi$

   $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt$$

   $$= \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} (1+t)\, dt + \int_{0}^{1} (1-t)\, dt\right) = \frac{1}{2}$$

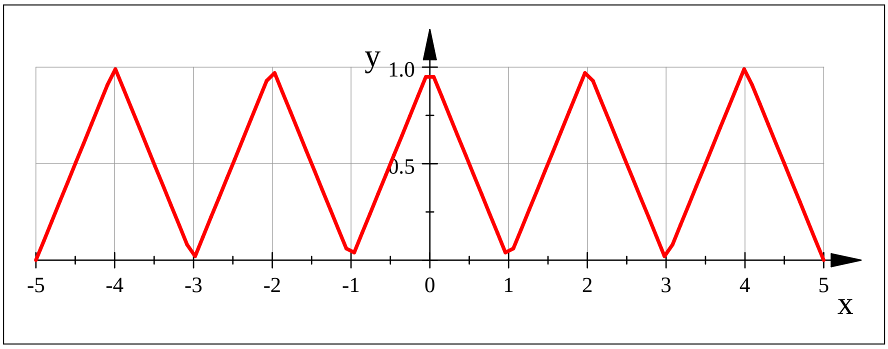
   $$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t dt$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} (1+t)\cos n\pi t dt + \int_{0}^{1} (1-t)\cos n\pi t dt$$

$$= -\frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\Longrightarrow a_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi^2 (2k+1)^2} & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}$$



Graphe de $S(t)$

4. **Déduire la somme** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$f(t)$ est continue au point $t = 0$ donc $f(0) = S(0)$

$f(0) = 1$

$$S(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

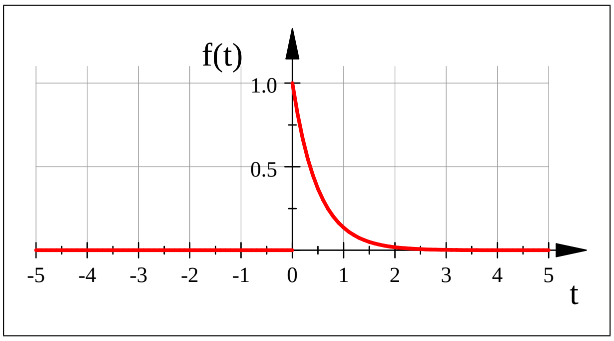
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 2 ***On considère la fonction***

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

1. **Tracer le graphe de** $f(t)$



2. **Calculer la transformée de Fourier de $f(t)$**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t)\, dt = \int_{0}^{\infty} \exp(-2t) \exp(-j\omega t)\, dt$$

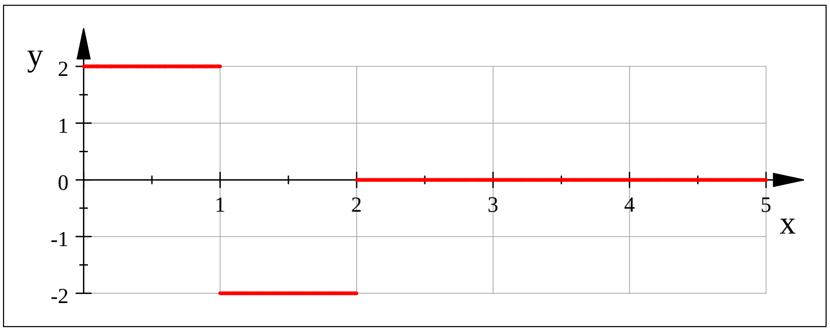
$$= \int_{0}^{\infty} \exp(-(2+j\omega)t)\, dt = -\left.\frac{e^{-2t}e^{-j\omega t}}{2+j\omega}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{2+j\omega} = \frac{2-j\omega}{4+\omega^2}$$

$$F(\nu) = \frac{2-2j\pi\nu}{4+4\pi^2\nu^2}$$

Exercice 3 ***On considère la fonction***

$$e(t) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 < t < 1 \\ -2 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

1. **Tracer le graphe de $e(t)$**



2. **Exprimer $e(t)$ en fonction de la fonction échelon unité $u(t)$**

$$e(t) = (2u(t) - 2u(t-1)) + (-2u(t-1) - (-2)u(t-2))$$

$$= 2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)$$

3. **Calculer la transformée de Laplace de $e(t)$**

$$E(p) = \int_0^1 2e^{-pt}dt - \int_1^2 2e^{-pt}dt$$

$$= -\frac{2}{p}\left(e^{-p}-1\right)+\frac{2}{p}\left(e^{-2p}-e^{-p}\right)=\frac{2}{p}\left(e^{-p}-1\right)^2$$

$$E\left(p\right)=2\mathcal{L}\left(u\left(t\right)\right)-4\mathcal{L}\left(u\left(t-1\right)\right)+2\mathcal{L}\left(u\left(t-2\right)\right)$$

$$=\frac{2}{p}-\frac{4e^{-p}}{p}+\frac{2e^{-2p}}{p}=\frac{2}{p}\left(e^{-p}-1\right)^2$$

4. **Déterminer la fonction $h\left(t\right)$ définie par sa transformée de Laplace:**

$$H_\alpha\left(p\right)=\frac{e^{-\alpha p}}{p^3+2p^2-3p}$$

où α,est une constante donnée.

$$H_0\left(p\right)=\frac{1}{p^3+2p^2-3p}=\frac{1}{4\left(p-1\right)}+\frac{1}{12\left(p+3\right)}-\frac{1}{3p}$$

$$h_0\left(t\right)=\left(\frac{e^t}{4}+\frac{e^{-3t}}{12}-\frac{1}{3}\right)u\left(t\right)$$

$$h_\alpha\left(t\right)=\left(\frac{e^{t-\alpha}}{4}+\frac{e\left(t-\alpha\right)}{12}-\frac{1}{3}\right)u\left(t-\alpha\right)$$

5. **Déduire la solution de l'équation différentielle** $y" + 2y' - 3y = e\left(t\right)$, **sachant que** $y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0$.

L'équation image est:

$$\mathcal{L}\left(y" + 2y' - 3y\right)=E\left(p\right)$$

$$p^2Y+2pY-3Y=E$$

$$Y=\frac{E}{p^2+2p-3}=\frac{2\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)}{p^3+2p^2-3p}=2\left(H_0-2H_1+H_2\right)$$

$$y\left(t\right)=2\left(h_0-2h_1+h_1\right)$$