Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

2eme session 2007-2008

Documents autorisés: Livre du cours **Durée : 3h**

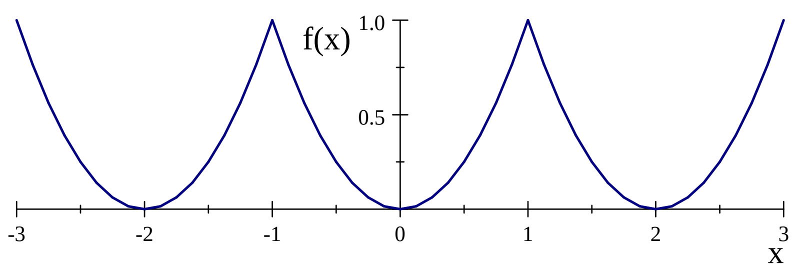
solutions

Exercice 1 *On considère la fonction $f(x)$ périodique de période $T = 2$ définie par $f(x) = x^2$ sur $[-1, 1]$.*

1. Tracer le graphe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-3, 3]$
2. Développer la fonction $f(x)$ en série réelle de Fourier
3. Déduire la série de Fourier de $g(x) = x$ définies sur $[-1, 1]$
4. Calculer les sommes: $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Solution 1 $f(x) = x^2$; $T = 2 \Rightarrow \omega = \pi$

1. Graphe:



Graphe de $f(x) = x^2$ sur $[-3, 3]$

2. $f(x) = x^2$ est une fonction paire $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos n\omega x dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x dx = 2\int_{0}^{1} x^2 \cos n\pi x dx$$

$$= 2x^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 2x \tfrac{\sin n\pi x}{n\pi}\, dx = -\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx$$

$$= \frac{4}{n^3\pi^3}\left(-\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi = 4\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$f(x)$ est continue sur $[-1, 1]$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2}$$

3. $g(x) = x = \frac{1}{2}\frac{df}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2}.\right) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\pi x}{n}$

4. Dans la série associée à $f(x)$ on fait $x = 0$

   $\Rightarrow f(0) = 0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}S_1 \Rightarrow S_1 = -\frac{\pi^2}{12}$

   De même pour $x = 1$:

   $f(1) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi}{n^2}. = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}S_2$

   $\Rightarrow S_2 = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 2 *On considère le signal* $e_a(t)$:

$$e_a(t) = \begin{cases} -a & si \quad -a < t < 0 \\ +a & si \quad 0 < t < a \end{cases}$$

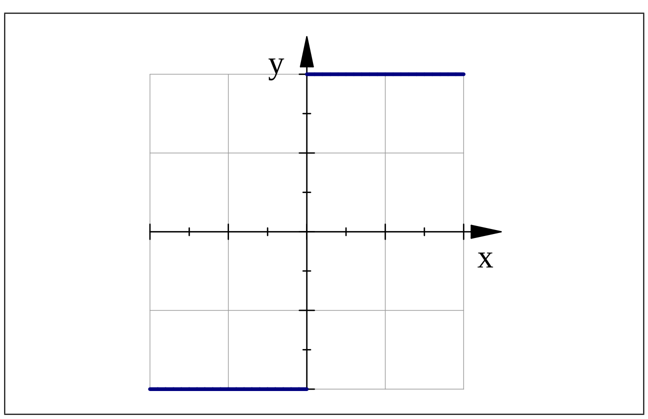
où a *est une constante positive*

1. Tracer le graphe de $e_a(t)$
2. Calculer la transformée de Laplace de $e_a(t)$
3. Exprimer $e_a(t)$ à l'aide de la fonction échelon unité $u(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$
4. Retrouver la transformée de Laplace de $e_a(t)$
5. Déduire la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = \begin{cases} -t & si \quad -1 < t < 0 \\ t & si \quad 0 < t < 1 \end{cases}$
6. Déterminer la fonction causale $g(t)$ telle que sa transformée de Laplace est :$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}$
7. En utilisant la transformée de Laplace, déterminer la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = e_1(t)$$

Solution 2 *:*

1. Graphe



2. $E_a(p) = \int\limits_{-a}^{0} (-a)\, e^{-pt} dt + \int\limits_{0}^{a} (a)\, e^{-pt} dt$

$$= -\frac{a}{p}\left(e^{ap}-1\right) - \frac{a}{p}\left(e^{-ap}-1\right) = \frac{a}{p}\left(2 - e^{ap} - e^{-ap}\right)$$

3. $e_a(t) = -a\left(u(t+a) - u(t)\right) + a\left(u(t) - u(t-a)\right)$

$$= a\left(-u(t+a) + 2u(t) - u(t-a)\right)$$

4. $\mathcal{L}(e_a) = a\mathcal{L}\left(-u(t+a) + 2u(t) - u(t-a)\right)$

$$= a\left(-\frac{e^{ap}}{p} + \frac{2}{p} - \frac{e^{-ap}}{p}\right) = \frac{a}{p}\left(2 - e^{ap} - e^{-ap}\right)$$

5. $f(t) = te_1(t)$

$$\Longrightarrow F(p) = -\frac{dE_1}{dp} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{a}{p}\left(2 - e^{ap} - e^{-ap}\right)\right)$$

$$= -\frac{a}{p^2 e^{-ap}}\left(e^{-ap}-1\right)\left(e^{-ap} + ap + ape^{-ap} - 1\right)$$

$$= \frac{a}{p^2 e^{-ap}}\left(1 - e^{-ap}\right)\left(e^{-ap} + ap + ape^{-ap} - 1\right)$$

6. $\frac{1}{p^3 + 2p^2 + p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}(G) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - te^{-t} - e^{-t} = g(t)$$

7. La Transformée de Laplace de l'équation est:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 2\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(e_1(t)) \quad \textit{soit } x(0) = x'(0) = 0$$

$$p^2X + 2pX + X = E_1 = \frac{1}{p}\left(2 - e^{p} - e^{-p}\right)$$

$$X = \frac{2 - e^{p} - e^{-p}}{(p^2 + 2p + 1)\, p} = 2G(p) - e^{-p}G(p) - e^{p}G(p)$$

$$\Longrightarrow x(t) = 2g(t) - g(t-1) - g(t+1)$$

Exercice 3 *On considère le champ vectoriel*

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{r}\exp\left(-r^2\right)$$

1. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ de gradient et déterminer le champ scalaire $f(x,y)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla f}$ et $f(\infty,\infty) = 0$

2. Calculer $\int\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ où C est une courbe joignant les points $A(0,0)$ et $B(\pi,\pi)$

3. Soit D le rectangle du plan (xOy) limité par $x = 0, x = X, y = 0, y = Y$ et on pose $R^2 = X^2 + Y^2$ En utilisant les coordonnées polaires, calculer l'intégrale

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$$

4. Calculer $\lim\limits_{R\to+\infty} I$ et en déduire la valeur de l'intégrale $J = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) dx$

Solution 3 $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{r} \exp\left(-r^2\right)$

1. $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{r} \exp\left(-r^2\right) = x \exp\left(-x^2 - y^2\right) \overrightarrow{i} + y \exp\left(-x^2 - y^2\right) \overrightarrow{j} = P \overrightarrow{i} + Q \overrightarrow{j}$

   $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2xy \exp\left(-x^2 - y^2\right) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ donc $\overrightarrow{H}$ est un champ de gradient, c-à-d il existe une fonction $f(x, y)\,; \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla f}$

   Donc $P = x \exp\left(-x^2 - y^2\right) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

   $\Longrightarrow f(x, y) = \displaystyle\int x \exp\left(-x^2 - y^2\right) dx = -\frac{1}{2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) + g(y)$

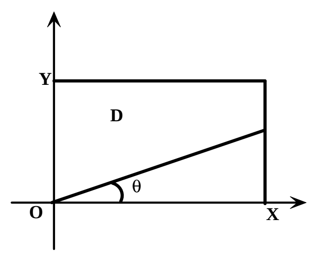
   $Q = y \exp\left(-x^2 - y^2\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = y \exp\left(-x^2 - y^2\right) + g' \Longrightarrow g' = 0 \Longrightarrow g(y) = const = k$

   soit $f(x, y) = -\dfrac{1}{2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) + k$

   $f(\infty, \infty) = k = 0 \quad \Longrightarrow f(x, y) = -\dfrac{1}{2} \exp\left(-x^2 - y^2\right)$

2. $\displaystyle\int_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_C \overrightarrow{\nabla f} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{AB} df = f(x, y)\Big|_A^B = f(\pi, \pi) - f(0, 0) = -\frac{1}{2}\left(\exp\left(-2\pi^2\right) - 1\right)$

3. $I = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy = I = -\frac{1}{2} \iint_D \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$



   En coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $dxdy = rdrd\theta$ et $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

   $I = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^R \int_0^{\pi/2} r \exp\left(-r^2\right) drd\theta = -\frac{\pi}{4} \int_0^R r \exp\left(-r^2\right) dr = \frac{\pi}{8} \exp\left(-r^2\right)\Big|_0^R = \frac{1}{8}\pi\left(e^{-R^2} - 1\right)$

4. Si $R \to \infty \Longrightarrow \exp\left(-R^2\right) \to 0$ et donc $I = -\dfrac{\pi}{8}$

   Considérons l'intégrale: $I_\infty = \displaystyle\iint_{D\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$

   $$= \left(\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)\left(\int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right) = J^2 = -2I = \frac{\pi}{4}$$

   Donc $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 4 *On désigne par (S) la surface cylindrique d'axe Oz, de rayon de base a telle que $0 \leq z \leq h = 2a$ et $x \geq 0$, $y \geq 0$. Soit*

$$\overrightarrow{F} = xy\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + x^2\overrightarrow{k}$$

un champ vectoriel défini sur (S).

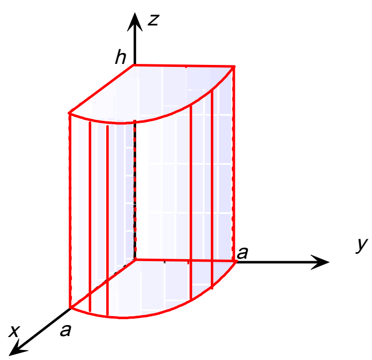
1. Calculer $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}$
2. Calculer à l'aide d'une intégrale de surface le flux Φ de $\overrightarrow{F}$ sortant de (S)
3. Recalculer Φ à l'aide d'une intégrale de volume
4. Soit D la projection de (S) sur la plan (xOy) .Vérifier le théorème de Stokes

Solution 4 $\overrightarrow{F}=xy\overrightarrow{i}+yz\overrightarrow{j}+x^2\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & x^2\end{vmatrix}=-y\overrightarrow{i}-2x\overrightarrow{j}-x\overrightarrow{k}$

   $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F}=y+z$

2. flux: $\Phi=\iint\limits_S\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}ds$



En coordonnées cylindriques: $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta \quad z=z$

★ La normale unitaire de (S) orientée vers l'extérieur est:

$$\overrightarrow{n}=\frac{x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}}{a}=\cos\theta\overrightarrow{i}+\sin\theta\overrightarrow{j}$$

★ $\overrightarrow{F}=a^2\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{i}+az\sin\theta\overrightarrow{j}+a^2\cos^2\theta\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}=a^2\cos^2\theta\sin\theta+az\sin^2\theta$ et $ds=adzd\theta$

$$\Phi=\int_0^{2a}\int_0^{\pi/2}\left(a^2\cos^2\theta\sin\theta+az\sin^2\theta\right)adzd\theta=a^2\int_0^{\pi/2}\left(az\cos^2\theta\sin\theta+\frac{z^2}{2}\sin^2\theta\right)_0^{2a}d\theta$$

$$=2a^4\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta\sin\theta+\sin^2\theta\right)d\theta=2a^4\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)_0^{\pi/2}$$

$$\Phi=2a^4\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{3}\right)$$

N.B: Sur la plan xoz la normale est $-\overrightarrow{j}$ et $y=0$ donc $\overrightarrow{F}\cdot\left(-\overrightarrow{j}\right)_{y=0}=-yz=0$

Sur la plan yoz la normale est $-\overrightarrow{i}$ et $x=0$ donc $\overrightarrow{F}\cdot\left(-\overrightarrow{i}\right)_{x=0}=-xy=0$

Alors le flux est $\Phi=2a^4\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}a^4\left(3\pi+4\right)$

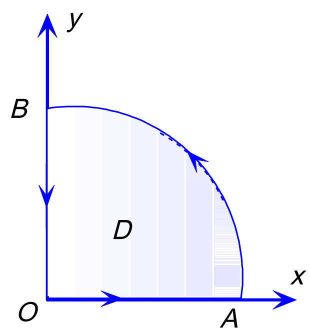
3. $\Phi = \iiint\limits_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} dv = \iiint\limits_V (y+z)\, dxdydz = \iiint\limits_\Delta (r\sin\theta + z)\, rdrd\theta dz$

$$= \int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a} \left(r^2 \sin\theta + zr\right) drd\theta dz = \int_0^a \int_0^{\pi/2} \left(zr^2 \sin\theta + \frac{z^2}{2} r\right)_0^{2a} drd\theta dz$$

$$= \int_0^a \int_0^{\pi/2} \left(2ar^2 \sin\theta + 2a^2 r\right) drd\theta = \int_0^a \left(2ar^2 \left(-\cos\theta\right) + 2a^2 r\theta\right)_0^{\pi/2} dr$$

$$= \int_0^a \left(2ar^2 + a^2 \pi r\right) dr = \frac{2}{3} a^4 + \frac{1}{2} \pi a^4 = \frac{1}{6} a^4 \left(3\pi + 4\right)$$

4. Formule de Stokes: $\oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_S \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds}$



$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = xydx + yzdy + x^2 dz$

La courbe $C = \widetilde{OABO}$ est dans le plan xoy c-à-d $z = dz = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = xydx$

Sur OA : $y = 0$ et sur BO: $x = 0 \Longrightarrow \oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{AB} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$

En coordonnées polaires: $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ $dx = -a\sin\theta d\theta$

$$\int\limits_{AB} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{AB} xydx = -a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta d\theta = -\frac{1}{3} a^3$$

La surface D de frontière (C) est le quart du disc du premier quadrant du plan xoy la normale unitaire est donc $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$

$\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n} = \left(-y\overrightarrow{i} - 2x\overrightarrow{j} - x\overrightarrow{k}\right) \cdot \overrightarrow{k} = -x = -r\cos\theta$

$ds = dxdy = rdrd\theta$ et $0 \le r \le a$ $\quad 0 \le \theta \le \pi/2$

$$\iint\limits_S \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_0^a \int_0^{\pi/2} -r^2 \cos\theta d\theta dr = -\frac{1}{3} a^3$$