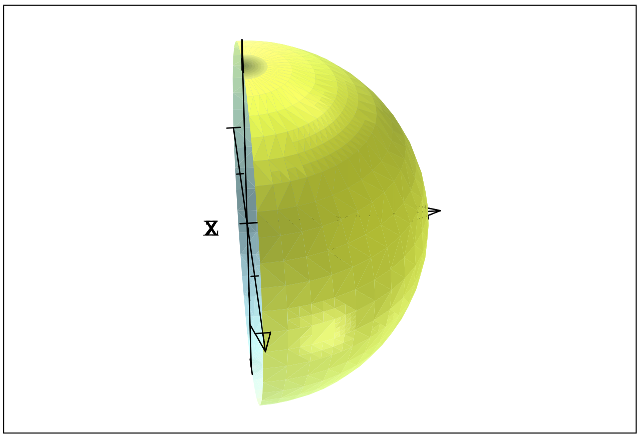
Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Centre du Liban Associé au
Conservatoire Nationale des Arts et Métiers – Paris

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Final 2008-2009 **Semestre II**

Solutions

Exercice 1 *On considère la demi-sphère* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *avec* $y \geq 0$



1. Calculer la masse de la surface supposée homogène et de densité de masse $\lambda = cte$.

   Réponse : $m = \iint\limits_S \lambda (x, y, z)\, dS$

   $$= \lambda \iint\limits_S dS = \lambda \iint\limits_\Delta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \lambda R^2 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta \right) d\varphi = 2\pi R^2 \lambda \ \blacksquare$$

2. Calculer, en fonction de la masse m, les moments d'inerties de la surface relativement aux axes des coordonnées.

   Réponse : Le moment d'inertie d'un élément de masse dm par rapport à un axe Δ est $dI_\Delta = r_\Delta^2 dm = \lambda r_\Delta^2 dS$ avec r_Δ est la distance à l'axe Δ.

   $I_\Delta = \iint\limits_S \lambda r_\Delta^2 dS = \lambda \iint\limits_S r_\Delta^2 dS$ avec $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

   Par rapport à Oz : $r_\Delta^2 = x^2 + y^2 = R^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + R^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta = R^2 \sin^2\theta$

   $$\Longrightarrow I_z = \lambda \iint\limits_S R^2 \sin^2\theta dS = \lambda R^2 \iint\limits_S R^2 \sin^2\theta \sin\theta d\theta d\varphi$$

   $$= \lambda R^4 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \sin^2\theta \sin\theta d\theta \right) d\varphi = \frac{4\pi}{3} \lambda R^4 = \frac{2}{3} m R^2$$

Par rapport à Ox : $r_\Delta^2 = z^2 + y^2 = R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi$

$$I_x = \lambda \iint\limits_S \left(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) dS$$

$$= \lambda \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) R^2 \sin\theta d\theta \right) d\varphi$$

$$= \lambda R^4 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi\right) \sin\theta d\theta \right) d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^4 \lambda = \frac{2}{3} m R^2$$

Par rapport à Oy : $r_\Delta^2 = z^2 + x^2 = R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi$

$$I_y = \lambda \iint\limits_S \left(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\right) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \lambda R^4 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi\right) \sin\theta d\theta \right) d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^4 \lambda = \frac{2}{3} m R^2 \quad \blacksquare$$

3. On remplit la demi-boule par un liquide dont la densité de masse varie avec la direction de Oz suivant la loi: $\rho = \rho_0 e^{-\gamma z}$, où γ et ρ_0 sont des constantes positives données. Calculer la masse du liquide.

Réponse : $m' = \iiint\limits_V \rho dx dy dz$

en coordonnées sphériques: $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

$$m' = \iiint\limits_\Sigma \rho_0 e^{-\gamma z} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \rho_0 \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\pi r^2 \sin\theta e^{-\gamma r\cos\theta} d\varphi \right) d\theta \right) dr$$

$$= \pi\rho_0 \int_0^R \left(\int_0^\pi r^2 \sin\theta e^{-\gamma r\cos\theta} d\theta \right) dr$$

On pose $u = \cos\theta \Longrightarrow du = -\sin\theta d\theta$ donc

$$\int_0^\pi r^2 \sin\theta e^{-\gamma r\cos\theta} d\theta = -\int_0^\pi r^2 e^{-\gamma r\cos\theta} d(\cos\theta)$$

$$= -r^2 \left. \frac{e^{-\gamma r\cos\theta}}{-\gamma r} \right|_0^\pi = \frac{r}{\gamma}\left(e^{\gamma r} - e^{-\gamma r}\right) = \frac{2r}{\gamma}\sinh\gamma r$$

$$m' = \pi\rho_0 \int_0^R \left(\frac{2r}{\gamma}\sinh\gamma r\right) dr = \frac{2\pi\rho_0}{\gamma} \int_0^R r \sinh\gamma r dr$$

$$\text{Par parties: }\left\{\begin{array}{ccc} u=r & \Longrightarrow & du=dr \\ \sinh\gamma r dr=dv & \Longrightarrow & v=\dfrac{\cosh\gamma r}{\gamma}\end{array}\right.$$

$$m'=\frac{2\pi\rho_0}{\gamma}\left(\left.\frac{r\cosh\gamma r}{\gamma}\right|_0^R-\int\limits_0^R\frac{\cosh\gamma r}{\gamma}dr\right)=\frac{2\pi\rho_0}{\gamma}\left(\frac{R\cosh\gamma R}{\gamma}-\left.\frac{\sinh\gamma r}{\gamma^2}\right|_0^R\right)$$

$$=\frac{2\pi\rho_0}{\gamma}\left(\frac{R\cosh\gamma R}{\gamma}-\frac{\sinh\gamma R}{\gamma^2}\right)\ \blacksquare$$

4. On considère le champ vectoriel $\overrightarrow{E}=A\dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}$. où A est une constante positive.

   (a) Montrer que le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers (S) s'exprime en fonction de l'angle solide sous lequel on peut voir la surface à partir de l'origine.

   Réponse : $\Phi=\iint\limits_S\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{n}dS=A\iint\limits_S\dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}dS=A\iint\limits_S\dfrac{1}{r^2}dS=A\Omega\ \blacksquare$

   (b) Calculer Ω et déduire Φ

   Réponse : $\Omega=\iint\limits_S\dfrac{1}{R^2}dS=\iint\limits_S\dfrac{1}{R^2}R^2\sin\theta d\theta d\varphi=\int\limits_0^\pi\left(\int\limits_0^\pi\sin\theta d\theta\right)d\varphi=2\pi$

   $\Phi=2\pi A\ \blacksquare$

5. On désigne par (D) le disque du plan (xOz) : $x^2+z^2=R^2$.

   (a) Calculer, Φ_D le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers (D).

   Réponse : $\Phi_D=\iint\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{d\sigma}$ où $d\sigma$ est l'élement de surface de (D).

   (D) est une partie du plan (xOz) donc une normale unitaire sur (D) est $\pm\overrightarrow{j}$.
   $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{j}=A\dfrac{y}{r^3}$ mais sur (xOz) $y=0$ donc $\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{j}=0$ et par suite $\Phi_D=0\ \blacksquare$

   (b) Soit $(\Sigma)=(S)\cup(D)$ .Calculer φ, le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers (Σ) en fonction de Φ et Φ_D.

   Réponse : $\varphi=\Phi+\Phi_D=\Phi=2\pi A\ \blacksquare$

   (c) Peut-t-on utliser la fromule d'Ostrogradsky pour calculer φ. Justifier votre réponse.

   Réponse : Le champ $\overrightarrow{E}$ n'est pas continue dans l'intérieure de (Σ) ,en particulier dans l'origine, donc on ne peut pas appliquer la formule d'Ostrogradsky. $\blacksquare$

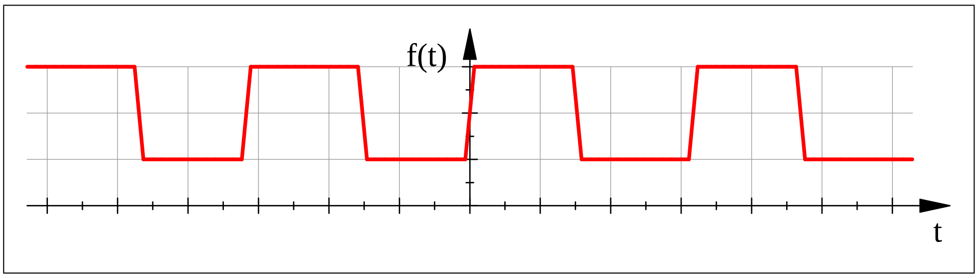
Exercice 2 *On considère la fonction $f(t)$ périodique de période 2π, définie par :*

$$f(t)=\left\{\begin{array}{lll} a & si & 0<t<\pi \\ b & si & \pi<t<2\pi\end{array}\right. \tag{1}$$

où a et b sont deux constantes positives données et $a>b$.

1. Tracer le graphe de $f(t)$ sur l'intervalle$]-4\pi, 4\pi[$

Réponse :



$\blacksquare$

2. Développer $f(t)$ en série réelle de Fourier

Réponse : $a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi} adt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} bdt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(at|_0^{\pi} + bt|_{\pi}^{2\pi}\right)$

$= \frac{a(\pi-0)+b(2\pi-\pi)}{2\pi} = \frac{a+b}{2}$

$T = 2\pi \Longrightarrow \omega = 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t dt = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi} a\cos nt dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} b\cos nt dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{a\sin nt}{n}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{b\sin nt}{n}\right|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi n}\left(a\sin n\pi + b\sin 2n\pi - b\sin n\pi\right) = 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t dt = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi} a\sin nt dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} b\sin nt dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(a\int_0^{\pi}\sin nt\,dt + b\int_{\pi}^{2\pi}\sin nt\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{a\cos nt}{n}\right|_0^{\pi} - \left.\frac{b\cos nt}{n}\right|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi n}\left(-a(\cos n\pi - \cos 0) - b(\cos 2n\pi - b\cos n\pi)\right)$$

$$= \frac{-1}{\pi n}\left(a\left((-1)^n - 1\right) + b\left(1-(-1)^n\right)\right) = \frac{a-b}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)$$

pour $n = 2k$ paire: $(-1)^n = +1 \Longrightarrow a_{2k} = 0$

pour $n = 2k+1$ impaire: $(-1)^n = -1 \Longrightarrow a_{2k+1} = \frac{2(a-b)}{\pi(2k+1)}$

$$S(t) = \frac{a+b}{2} + 2\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} \quad \blacksquare$$

3. En déduire la somme : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}$

Réponse : La fonction $f(t)$ est continue au point $t=1$ et donc la série de Fourier, au point $t=1$, se converge vers $f(1)$

$$f(1)=a=\frac{a+b}{2}+2\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

$$a-\frac{a+b}{2}=2\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}\Longrightarrow\frac{a-b}{2}=2\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}$$

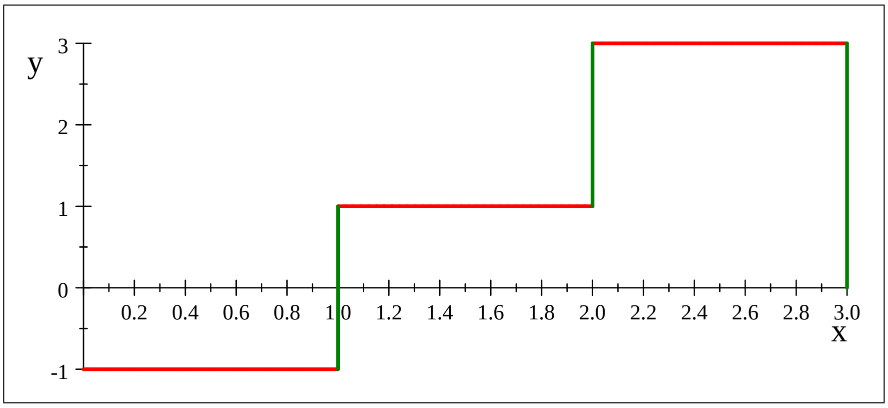
$$\Longrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}\Longrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}=\frac{\pi}{4}\quad\blacksquare$$

Exercice 3 *On considère la fonction causale:*

$$f(t)=\begin{cases}-1 & si \quad 0<t<1\\ 1 & si \quad 1<t<2\\ 3 & si \quad 2<t<3\\ 0 & \quad ailleurs\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f(t)$

   Réponse :



$\blacksquare$

2. Calculer par intégration, $F(p)$, la transformée de Laplace de $f(t)$

   Réponse : $F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\,e^{-pt}dt=\int_0^1(-1)\,e^{-pt}dt+\int_1^2(1)\,e^{-pt}dt+\int_2^3(3)\,e^{-pt}dt$

$$=\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^1-\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_1^2-3\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_2^3$$

$$=\frac{e^{-p}-1}{p}-\frac{e^{-2p}-e^{-p}}{p}-3\frac{e^{-3p}-e^{-2p}}{p}=\frac{-1+2e^{-p}+2e^{-2p}-3e^{-3p}}{p}\quad\blacksquare$$

3. Exprimer $f(t)$ en fonction de l'échelon unité $u_a=u(t-a)$.

   Réponse : $f(t)=-(u_0-u_1)+(u_1-u_2)+3(u_2-u_3)=-u_0+2u_1+2u_2-3u_3$ $\blacksquare$

4. Retrouver $F(p)$

   Réponse : $F(p) = \mathcal{L}(-u_0 + 2u_1 + 2u_2 - 3u_3)$

   $\mathcal{L}(u_a) = \mathcal{L}(u(t-a)) = \dfrac{e^{-ap}}{p}$

   $\Longrightarrow F(p) = \dfrac{1}{p}\left(-1 + 2e^{-p} + 2e^{-2p} - 3e^{-3p}\right)$ ■

5. Déterminer la fonction causale $h_\gamma(t)$ telle que sa transformée de Laplace est

$$H_\gamma(p) = \frac{e^{\gamma p}}{p^3 + 3p^2 + 2p}$$

   Réponse : $H_0(p) = \dfrac{1}{p^3 + 3p^2 + 2p} = \dfrac{1}{p(p^2 + 3p + 2)} = \dfrac{1}{2(p+2)} - \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{2p}$

   $\Longrightarrow h_0(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-2t} - 2e^{-t} + 1\right) u(t)$

   $H_\gamma(p) = e^{\gamma p} H_0(p) \Longrightarrow h_\gamma(t) = h_0(t - \gamma)$ ■

6. Déduire la solution de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = f(t)$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$

   Réponse : $\mathcal{L}(y'' + 3y' + 2y) = \mathcal{L}(f)$

   $\mathcal{L}(y) = Y$

   $\mathcal{L}(y') = pY - y(0) = pY$

   $\mathcal{L}(y'') = p^2 Y - y(0)\,p - y'(0) = p^2 Y - 3$

   $p^2 Y - 3 + 3pY + 2Y = F(p)$

   $(p^2 + 3p + 2)\,Y - 3 = \dfrac{-1 + 2e^{-p} + 2e^{-2p} - 3e^{-3p}}{p}$

   $Y = \dfrac{-1 + 2e^{-p} + 2e^{-2p} - 3e^{-3p}}{p(p^2 + 3p + 2)} + \dfrac{3}{p^2 + 3p + 2}$

   $G(p) = \dfrac{3}{p^2 + 3p + 2} = \dfrac{3}{p+1} - \dfrac{3}{p+2} \to g(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t}$

   $\dfrac{-1 + 2e^{-p} + 2e^{-2p} - 3e^{-3p}}{p(p^2 + 3p + 2)} = -H_0 + 2H_1 + 2H_2 - 3H_3$

   $Y(p) = -H_0 + 2H_1 + 2H_2 - 3H_3 + G$

$$y(t) = -h_0(t) + 2h_1(t) + 2h_2(t) - 3h_3(t) + g(t)$$

   ■

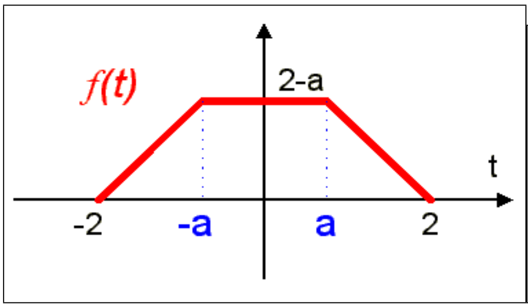
Exercice 4 *On considère les fonctions*

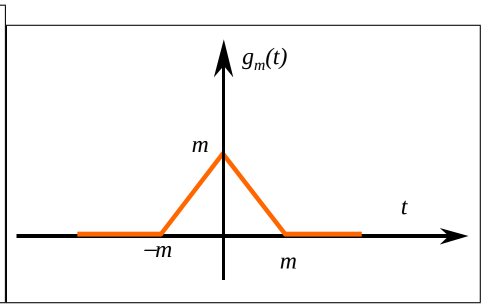
$$f(t) = \begin{cases} 2 + t & si \quad -2 \le t \le -a \\ 2 - a & si \quad -a \le t \le a \\ 2 - t & si \quad a \le t \le 2 \\ 0 & si \quad |t| > 2 \end{cases} \qquad et\ g_m(t) = \begin{cases} m - |t| & si \quad |t| \le m \\ 0 & si \quad |t| > m \end{cases}$$

m et a sont deux réels; $0 < a < 2$ *et* $m > 0$

1. Tracer les graphes de $f\left(t\right)$ et $g_m\left(t\right)$

Réponse :





■

2. Caculer l'intégrale $\int\limits^{\beta} te^{-xt}dt$

Réponse : $\int\limits_{\alpha}^{\beta} te^{-xt}dt = \dfrac{-\left(\beta x+1\right)e^{-\beta x}+\left(\alpha x+1\right)e^{-\alpha x}}{x^2}$ ■

3. Calculer la transformée de Fourier de $g\left(t\right)$.

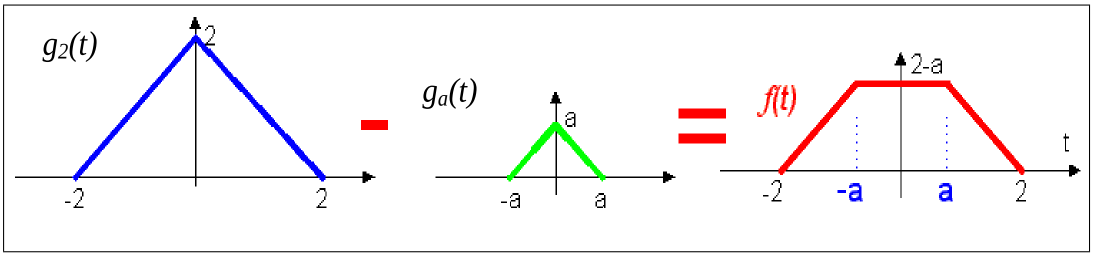
Réponse : $G_m\left(\nu\right) = \int\limits_{-m}^{m}\left(m-t\right)e^{-j\omega t}dt = \int\limits_{-m}^{0}\left(m+t\right)e^{-j\omega t}dt + \int\limits_{0}^{m}\left(m-t\right)e^{-j\omega t}dt$

$= 2\dfrac{1-\cos m\omega}{\omega^2} = \dfrac{2-2\cos 2m\pi\nu}{\left(2\pi\nu\right)^2} = m^2\left(\dfrac{\sin m\pi\nu}{m\pi\nu}\right)^2$ ■

4. Montrer que $f\left(t\right)$ s'exprime sous la forme $f\left(t\right) = g_\alpha\left(t\right) - g_\beta\left(t\right)$. En déduire la transformée de Fourier de $f\left(t\right)$

Réponse : $g_m\left(t\right) = \begin{cases} m+t & si \quad -m \leq t \leq 0 \\ m-t & si \quad 0 \leq t \leq m \end{cases}$

alors on remarque immediatement que $f\left(t\right) = g_2\left(t\right) - g_a\left(t\right)$



$\Longrightarrow F\left(\nu\right) = G_2\left(\nu\right) - G_a\left(\nu\right) = \dfrac{2-2\cos 4\pi\nu}{\left(2\pi\nu\right)^2} - \dfrac{2-2\cos 2a\pi\nu}{\left(2\pi\nu\right)^2}$

$= \dfrac{-\cos 4\pi\nu + \cos 2\pi\nu a}{2\pi^2\nu^2} = 4\left(\dfrac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}\right)^2 - a^2\left(\dfrac{\sin a\pi\nu}{a\pi\nu}\right)$ ■