Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen de Rattrapage 2008-2009 **Semestre II**

Documents autorisés: Livre du cours exclusivment Durée : 3 h.

Exercise 1 *Soit la fonction f périodique de période* 4

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [-2, -1[\\ 1 + x & si \quad x \in [-1, 0[\\ 1 - x & si \quad x \in [0, 1[\\ 0 & si \quad x \in [1, 2] \end{cases}$$

1. Etudier la parité de f
2. Expliquer pourquoi f est développable en une série de Fourier
3. Tracer le graphe de f sur $[-4, 4]$
4. Trouver la série de Fourier réelle associée à f
5. Déduire la somme $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et justifier votre réponse
6. Déduire la série de Fourier de la fonction $g(x) = f'(x)$

Exercise 2 *On considère la fonction $g(x) = |x|$ pour $|x| \leq 1$ et nulle pour $|x| > 1$*

1. Tracer le graphe de $g(x)$
2. Calculer la transformée de Fourier de $g(x)$
3. En déduire que $g(x)$ s'exprime sous la forme: $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Déterminer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
4. On désigne par g^{*n} le produit de convolution: $\underbrace{g * g * g .... * g}_{\mathbf{n} \text{ fois}}$. Calculer la transformée de Fourier de g^{*n}.

Exercise 3 *On considère les fonctions*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; 0 < t < 1 \\ -1 & si \;\; 2 < t < 3 \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \qquad et \;\; u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 1 & si \;\; t > a \\ 0 & si \;\; t < a \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f(t)$ et préciser les points de discontinuité.
2. Calculer, par intégration, la transformée de Laplace de $f(t)$.
3. Exprimer $f(t)$ à l'aide de l'échelon unité $u_a(t)$ et retouver sa transformée de Laplace.
4. Soit la fonction $H_\alpha(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p^3 - p^2 - 6p}$ la transformée de Laplace de la fonction $h_\alpha(t)$. Déterminer $h_\alpha(t)$.
5. En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation différentielle:

$$y'' - y' - 6y = f(t)$$

sachant que $y'(0) = y(0) = 0$.