Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Final 2009-2010 **Semestre II**

Solutions

Exercice 1 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique E par:*

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (2\beta - \gamma, 5\beta - 2\alpha - 2\gamma, 8\beta - 4\alpha - 3\gamma)$$

avec$E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f, E)$.
2. f est-il inversible? Justifier votre réponse.
3. Calculer A^n $(\forall n \in \mathbb{N})$.
4. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$,en précisant les bases et les dimensions.
5. Soit la matrice $B = A + 2I$. Calculer en fonction de A et I les matrices B^2 et B^3.
6. Déterminer l'équation caractéristique, $P(\lambda)$,de la matrice B, Vérifier que $P(B) = O$ et déduire son inverse B^{-1}.
7. Déduire la solution du système linéaire:

$$\begin{cases} 2a + 2b - c = 15 \\ -2a + 7b - 2c = 33 \\ -4a + 8b - c = 33 \end{cases} \qquad (S)$$

8. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f.
9. Déduire que A est diagonalisable, donner la matrice diagonale, D semblable à A,calculer D^n $(\forall n \in \mathbb{N})$ et retrouver A^n.
10. Déduire la solution générale du système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 5y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 8y - 3z \end{cases} \qquad ((S_1))$$

où $x = x(t)$, $y = y(t)$, et $z = z(t)$.

Solution 1 $A = M(f, E)$

1. $f(e_1) = f(1,0,0) = (0,-2,-4)$
   $f(e_2) = f(0,1,0) = (2,5,8)$
   $f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,-2,-3)$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

2. $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 0$ donc A n'est pas inversible par suite f n'est pas inversible.

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = A$
   $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$
   On démontre par réccurence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = A$

4. $\operatorname{Im} f = \{V \in \mathbb{R}^3 \ / \ V = f(v), \text{ et } v \in \mathbb{R}\}$
   Si $V = (X,Y,Z) \in \operatorname{Im} f$ et $v = (x,y,z)$ alors $\begin{cases} X = 2y - z \\ Y = 5y - 2x - 2z \\ Z = 8y - 4x - 3z \end{cases}$

   $X + Z = (2y - z) + (8y - 4x - 3z) = 10y - 4x - 4z = 2Y \Longrightarrow X = 2Y - Z$

   Alors on écrit $V = (X,Y,Z) = (2Y - Z, Y, Z) = (2Y, Y, 0) + (-Z, 0, Z)$
   $= Y(2,1,0) + Z(-1,0,1)$
$$\operatorname{Im} f = \{V = (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = 2Y - Z\}$$
   les vecteurs $v_1 = (2,1,0)$et $v_2 = (-1,0,1)$ constituent une base de $\operatorname{Im} f$
   $\Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$
   $\ker f = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(u) = 0\}$
   Si $u = (x,y,z) \in \ker f$ alors $f(u) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ -2x + 5y - 2z = 0 \\ -4x + 8y - 3z = 0 \end{cases}$
   La première équation nous donne $z = 2y$.
   les deux autres seront: $\begin{cases} -2x + 5y - 4y = 0 \\ -4x + 8y - 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 2x$
   $(x,y,z) = (x, 2x, 4x) = x(1,2,4)$
   $\ker f = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = 4x = 2y\}$

le vecteur $u_0 = (1, 2, 4)$ est une base de $\ker f \Longrightarrow \dim \ker f = 1$

$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

5. $B = A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

   $B^2 = (A + 2I)^2 = A^2 + 4AI + 4I^2 = A + 4A + 4I = 5A + 4I$

   $B^3 = B.B^2 = (A + 2I)(5A + 4I) = 5A^2 + 14AI + 8I^2 = 5A + 14A + 8I = 19A + 8I$

6. $P(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 7-\lambda & -2 \\ -4 & 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18$

   $P(B) = -B^3 + 8B^2 - 21B + 18I = -(19A + 8I) + 8(5A + 4I) - 21(A + 2I) + 18I$

   $= -19A - 8I + 40A + 32I - 21A - 42I + 18I = 0.$

   $\det(B) = 18$

   $P(B) = -B^3 + 8B^2 - 21B + 18I = 0 \Longrightarrow B^{-1} \times P(B) = -B^2 + 8B - 21I + 18B^{-1} = 0$

   $\Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{18}(B^2 - 8B + 21I) = \frac{1}{18}((5A + 4I) - 8(A + 2I) + 21I)$

   $= \frac{1}{18}(-3A + 9I) = \frac{1}{6}(-A + 3I)$

   $B^{-1} = \frac{1}{6}\left(-\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

7. Posons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix}$

   le système s'écrit sous la forme: $BX = C$

   $\Longrightarrow X = B^{-1}C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\Longrightarrow a = 2, \qquad b = 5 \qquad et \qquad c = -1$

8. Les valeurs propres de f sont celles de la matrice A, et elles sont les racines de l'équation caractéristique : $Q(X) = 0$

   $Q(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ -2 & 5-X & -2 \\ -4 & 8 & -3-X \end{vmatrix} = -X^3 + 2X^2 - X = -X(X-1)^2$

   donc 3 valuers propres: $\lambda_1 = 0$ une racine simple et $\lambda_2 = 1$ une racine double.

Les vecteurs propres sont V_i tels $f(V_i) = AV_i = \lambda_i V_i$

$$V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_1 = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2b - c = 0 \\ 5b - 2a - 2c = 0 \\ 8b - 4a - 3c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left[a = \frac{1}{4}c, b = \frac{1}{2}c\right] \Longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}c \\ \frac{1}{2}c \\ c \end{pmatrix} \text{ soit } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_2 = 1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2b - c = a \\ 5b - 2a - 2c = b \\ 8b - 4a - 3c = c \end{cases} \Longrightarrow a = 2b - c \Longrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 2b - c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Soient $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

   $A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

   or $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

   donc $A^n = PD^nP^{-1} = PDP^{-1} = A \ \forall n \in \mathbb{N}$

10. Solution du système différentiel : $(S_1) \Longleftrightarrow \varphi'(t) = A\varphi(t)$

   - En utilisant les vecteurs propres

   $$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + (C_2 v_2 + C_3 v_3) e^{\lambda_2 t}$$

   $$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t = \begin{pmatrix} C_1 - e^t(C_3 - 2C_2) \\ 2C_1 + C_2 e^t \\ 4C_1 + C_3 e^t \end{pmatrix}$$

   $\Longrightarrow$

   $$\begin{cases} x(t) = C_1 + (2C_2 - C_3)e^t \\ y(t) = 2C_1 + C_2 e^t \\ z(t) = 4C_1 + C_3 e^t \end{cases}$$

- Par matrice exponentielle

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \frac{1}{5!}A^5t^5 + \cdots$$

$$= I + A\left(t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right) = I + A\left(e^t - 1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}\left(e^t - 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^t - 2 & 1 - e^t \\ 2 - 2e^t & 5e^t - 4 & 2 - 2e^t \\ 4 - 4e^t & 8e^t - 8 & 4 - 3e^t \end{pmatrix}$$

$$Y = e^{At}C = \begin{pmatrix} 1 & 2e^t - 2 & 1 - e^t \\ 2 - 2e^t & 5e^t - 4 & 2 - 2e^t \\ 4 - 4e^t & 8e^t - 8 & 4 - 3e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1' + C_2'\left(2e^t - 2\right) - C_3'\left(e^t - 1\right) \\ C_2'\left(5e^t - 4\right) - C_3'\left(2e^t - 2\right) - C_1'\left(2e^t - 2\right) \\ C_2'\left(8e^t - 8\right) - C_3'\left(3e^t - 4\right) - C_1'\left(4e^t - 4\right) \end{pmatrix}$$

$$x\left(t\right) = C_1' - 2C_2' + C_3' + \left(2C_2' - C_3'\right)e^t$$

$$y\left(t\right) = 2\left(C_1' - 2C_2' + C_3'\right) + \left(-2C_1' + 5C_2' - 2C_3'\right)e^t$$

$$z\left(t\right) = 4\left(C_1' - 2C_2' + C_3'\right) + \left(-4C_1' + 8C_2' - 3C_3'\right)e^t$$

posons: $C_1 = \left(C_1' - 2C_2' + C_3'\right), C_2 = -2C_1' + 5C_2' - 2C_3', C_3 = -4C_1' + 8C_2' - 3C_3'$

$2C_2 - C_3 = 2\left(-2C_1' + 5C_2' - 2C_3'\right) - \left(-4C_1' + 8C_2' - 3C_3'\right) = 2C_2' - C_3',$

on retrouve : $\begin{cases} x\left(t\right) = C_1 + \left(2C_2 - C_3\right)e^t \\ y\left(t\right) = 2C_1 + C_2e^t \\ z\left(t\right) = 4C_1 + C_3e^t \end{cases}$

Exercice 2 *L'espace de dimension* 3 *est muni du repère orthonormé* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. *On note* $\overrightarrow{V}$ *le champ de vecteur qui associe au point* $M(x, y, z)$ *le vecteur*

$$\overrightarrow{V}(M) = z(y - x)\overrightarrow{i} + z(x - y)\overrightarrow{j} - (x - y)^2\overrightarrow{k}$$

On définit aussi le champ de vecteur $\overrightarrow{H} = \varphi\left(z\right)\overrightarrow{V}$.

On désigne par (S) *la surface sphérique :* $x^2+y^2+z^2 = a^2$ *telle que* $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ *et par* (Σ) *le volume intérieur de la zone sphérique limitée par* (S) *et les plans de coordonnées.*

Soient $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ *les arcs circulaires intersection de* (S) *avec les plans de coordonnées, tels que* $A\ (a, 0, 0)$, $B\ (0, a, 0)$ *et* $C\,(0, 0, a)$.

On note: D_{xy} *: la zone limitéé par* $\overset{\frown}{AB}$ *, ox et oy* ; D_{yz} *: la zone limitée par* $\overset{\frown}{BC}$ *, oy et oz;* D_{xz} *: la zone limitée par* $\overset{\frown}{CA}$ *, ox et oz.*

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}$. Le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire,d'un potentiel vecteur?

2. Déterminer la fonction $\varphi\left(z\right)$ telle que le $\overrightarrow{H}$ soit un champ de gradient.

3. Trouver la fonction $f = f\left(x, y, z\right)$ le potentiel scalaire de $\overrightarrow{H}$.

4. Calculer le travail W_Γ effectué par le champ $\overrightarrow{V}$ en traversant la courbe

$$(\Gamma) = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BC} \cup \overset{\frown}{CA}.$$

5. Recalculer W_Γ en utilisant la formule de Green - Reimann.

6. Trouver, sans faire de calcul, le travail effectué par le champ $\overrightarrow{H}$ en traversant la courbe (Γ).

7. Calculer les flux du champ $\overrightarrow{V}$ à travers:

   (a) La surface (S)

   (b) La zone D_{xy}

   (c) La zone D_{yz}

   (d) La zone D_{xz}

8. Montrer qu'on peut calculer le flux total de$\overrightarrow{V}$ à travers la surface

$$(\Delta) = (S) \cup D_{xy} \cup D_{yz} \cup D_{xz}$$

   à l'aide d'une intégrale triple.

9. Calculer à l'aide d'une intégrale triple $\iint\limits_{\Delta} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{ds}$

Solution 2 $\overrightarrow{V}(M) = z(y-x)\overrightarrow{i} + z(x-y)\overrightarrow{j} - (x-y)^2\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z(y-x) & (x-y)z & -(x-y)^2 \end{vmatrix} = (x-y)\overrightarrow{i} + (x-y)\overrightarrow{j}$

   $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = -2z$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} \neq 0$ donc $\overrightarrow{V}$ ne dérive pas ni d'un potentiel scalaire, ni d'un potentiel vecteur

2. $\overrightarrow{H} = z(y-x)\varphi\overrightarrow{i} + z(x-y)\varphi\overrightarrow{j} - (x-y)^2\varphi\overrightarrow{k}$ est un champ de gradient si $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$. Alors si:

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z(y-x)\varphi & z(x-y)\varphi & -(x-y)^2\varphi \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$

   $\Longleftrightarrow ((x-y)\varphi - z(x-y)\varphi')\overrightarrow{i} + (z(y-x)\varphi' + 2(x-y)\varphi)\overrightarrow{j} + (z\varphi - z\varphi)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$

   $\Longrightarrow \varphi = z\varphi' \Longleftrightarrow \varphi = z\dfrac{d\varphi}{dz} \Longrightarrow \dfrac{d\varphi}{\varphi} = \dfrac{dz}{z} \Longrightarrow \varphi(z) = z.$

   $\overrightarrow{H} = (y-x)z^2\overrightarrow{i} + (x-y)z^2\overrightarrow{j} - (x-y)^2 z\overrightarrow{k}$

3. $f = f(x,y,z)$ est le potentiel scalaire de $\overrightarrow{H}$ donc $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\text{grad}} f \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (y-x)z^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = (x-y)z^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -(x-y)^2 z \end{cases}$$

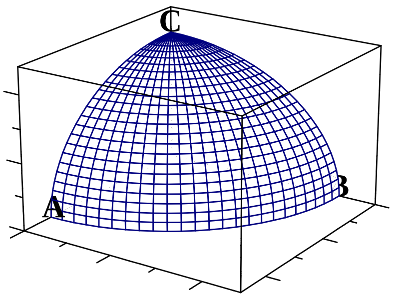
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y-x)z^2 \Longrightarrow f(x,y,z) = \int (y-x)z^2 dx = \left(xy - \frac{1}{2}x^2\right) z^2 + g(y,z)$$

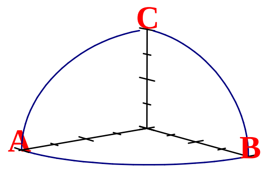
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = (x-y)z^2 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -yz^2 \Longrightarrow g(y,z) = -\frac{1}{2}y^2z^2 + h(z)$$

$$f(x,y,z) = \left(xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) z^2 + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\left(\left(xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)\right) + h' = -(x-y)^2 z \Longrightarrow h' = 0 \text{ donc } h(z) = ct^e = K$$

$$f(x,y,z) = \left(xy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) z^2 + K$$





4. Le travail effectué par $\overrightarrow{V}$ est donné par :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_\Gamma z(y-x)dx + z(x-y)dy - (x-y)^2 dz$$

et $\oint_\Gamma = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$

Sur $\overset{\frown}{AB} \subset (xoy)$: $z = dz = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = 0 \Longrightarrow \int_{AB} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$

Sur $\overset{\frown}{BC} \subset (yoz)$: $x = dx = 0 \Longrightarrow \int_{BC} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{BC} -zydy - y^2dz$

En coordonées polaires $(r=a)$:

$$\begin{cases} y = a\cos\theta \Longrightarrow & dy = -a\sin\theta d\theta \\ z = a\sin\theta \Longrightarrow & dz = a\cos\theta d\theta \end{cases} \quad \text{et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} -zydy - y^2dz &= \left(-\left(a\sin\theta\right)\left(a\cos\theta\right)\left(-a\sin\theta\right) - \left(a\cos\theta\right)^2\left(a\cos\theta\right)\right)d\theta \\ &= a^3\left(\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta\right)d\theta \end{aligned}$$

$$\int\limits_{BC} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = a^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta\right)d\theta$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta d\theta = \left.\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta = \int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta = \left.\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

$$\int\limits_{BC}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}a^3$$

Sur $\overset{\frown}{CA} \subset (xoz) : y = dy = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = -zxdx - x^2dz$

En coordonées polaires $(r=a)$:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \Longrightarrow & dx = -a\sin\theta d\theta \\ z = a\sin\theta \Longrightarrow & dz = a\cos\theta d\theta \end{cases}$$

Mais en allant de C vers A θ varie de $\pi/2$ à 0

$$\begin{aligned} -zxdx - x^2dz &= -\left(a\sin\theta\right)\left(a\cos\theta\right)\left(-a\sin\theta d\theta\right) - \left(a\cos\theta\right)^2\left(a\cos\theta d\theta\right) \\ &= a^3\left(\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta\right)d\theta \end{aligned}$$

$$\int\limits_{CA}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = a^3\int\limits_{\pi/2}^{0}\left(\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta\right)d\theta = \frac{1}{3}a^3$$

$$\oint\limits_{\Gamma}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = 0 - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = 0$$

5. Soit $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = Pdx + Qdy + Rdz = z(y-x)dx + z(x-y)dy - (x-y)^2dz$

Sur $ox : y = dy = z = dz = 0 \Longrightarrow \left.\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr}\right|_{Ox} = 0(0-x)dx + 0(x-0)0 - (x-0)^2 0 = 0$

Sur $oy : x = dx = z = dz = 0 \Longrightarrow \left.\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr}\right|_{Oy} = 0(y-0)0 + 0(0-y)dy - (0-y)^2 0 = 0$

Sur $Oz : x = dx = y = dy = 0 \Longrightarrow \left.\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr}\right|_{Oz} = z(0-0)0 + z(0-0)0 - (0-0)^2 dz = 0$

$$\oint\limits_{AB/ox/oy}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = \iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_{z=0} dxdy = 0$$

$$\oint\limits_{BC/oy/oz}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = \iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{x=0} dzdy$$

$$\Longleftrightarrow \int\limits_{BC/oy/oz} -zydy - y^2dz = -\int\limits_{BC/oy/oz} zydy + y^2dz = -\iint\limits_{D_{xy}} (2y-y)\,dydz$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} ydzdy = -\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\pi/2} r^2\cos\theta d\theta\right) dr = -\frac{1}{3}a^3$$

$$\oint\limits_{CA/ox/oz} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = \iint\limits_{D_{xz}} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)_{y=0} dxdz$$

$$\int\limits_{CA} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_{CA} -zxdx - x^2dz = -\int\limits_{CA} zxdx + x^2dz = -\iint\limits_{D_{xz}} (2x-x)\,dxdz$$

$$= -\iint\limits_{D_{xz}} xdxdz = -\int\limits_0^a \left(\int\limits_{\pi/2}^{0} (r\cos\theta)(r)\,d\theta\right) dr = \frac{1}{3}a^3$$

<u>N.B.</u> L'intégration sur θ se fait de $\pi/2$ à 0 car la courbe CA est parcourue de C à A.

$$\oint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{dr} = 0 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = 0$$

6. $\overrightarrow{H}$ est un champ de gradient, (Γ) est fermée donc $\oint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = 0$

7. les flux du champ $\overrightarrow{V}(M) = z(y-x)\overrightarrow{i} + z(x-y)\overrightarrow{j} - (x-y)^2\,\overrightarrow{k}$

   L'orientation positive de (S) correspondante à l'orientation positive de la courbe (Γ), donc la normale unitaire $\overrightarrow{n}$ est dirrigée vers l'extérieur.

   (a) $\Phi_S = \iint\limits_S \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n}ds$

   (S) est une surface sphérique de rayon $R = a$ donc $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{a}$

   $$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n} = \frac{1}{a}\left(z(y-x)x + z(x-y)y - (x-y)^2 z\right) = \frac{-2z\,(x-y)^2}{a}$$

   en coordonnées sphériques, avec $r = a$: $\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\theta \end{cases}$

   $ds = a^2\sin\theta d\theta d\varphi \qquad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \qquad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

   $$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n} = -\frac{2}{a}a\cos\theta\,(a\cos\varphi\sin\theta - a\sin\varphi\sin\theta)^2 = -2a^2\cos\theta\sin^2\theta\,(\cos\varphi - \sin\varphi)^2$$

   $$= -2a^2\cos\theta\sin^2\theta\,(1 - 2\cos\varphi\sin\varphi) = -2a^2\cos\theta\sin^2\theta\,(1-\sin 2\varphi)$$

   $$\Phi_S = \iint\limits_S \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n}ds = \iint\limits_{S'} \left(-2a^2\cos\theta\sin^2\theta\,(1-\sin 2\varphi)\right) a^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

   $$= -2a^4\left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin^3\theta d\theta\right)\left(\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin 2\varphi)\,d\varphi\right)$$

   $$\int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin^3\theta d\theta = \left.\frac{\sin^4\theta}{4}\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \text{ et } \int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin 2\varphi)\,d\varphi = \left(\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)_0^{\pi/2}$$

$$\Phi_S = -2a^4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\pi-2}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)a^4$$

(b) Sur D_{xy} la normale unitaire orientée vers l'extérieure est $\overrightarrow{n_{xy}} = -\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n_{xy}}ds = -\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{k}\,ds = (x-y)^2\,dxdy$

En passant vers les coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & z = r\sin\theta \\ 0 \le r \le a & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et } dxdy = rdrd\theta$$

$$(x-y)^2\,dxdy = (r\cos\theta - r\sin\theta)^2\,rd\theta dr = r^3(\cos\theta-\sin\theta)^2\,d\theta dr = r^3(1-\sin 2\theta)$$

$$\Phi_{xy} = \iint_{D_{xy}}(x-y)^2\,dxdy = \int_0^a\left(\int_0^{\pi/2} r^3(1-\sin 2\theta)\,d\theta\right)dr$$

$$= \int_0^a\left(\frac{1}{2}r^3(\pi-2)\right)dr = \left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)a^4$$

$$\int_0^{\pi/2}(1-\sin 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}(\pi-2)$$

(c) Sur D_{yz} la normale unitaire orientée vers l'extérieure est $\overrightarrow{n_{yz}} = -\overrightarrow{i}$.

$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n_{yz}}ds = -\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{i}\,ds = -zydzdy$

En passant vers les coordonnées polaires:

$$\begin{cases} y = r\cos\theta & z = r\sin\theta \\ 0 \le r \le a & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et } dzdy = rdrd\theta$$

$$-zydzdy = -r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta$$

$$\Phi_{yz} = \iint_{D_{yz}}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n_{yz}}ds = -\iint_{D_{yz}} zy^2dzdy = -\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2} r^3\cos\theta\sin\theta d\theta\right)dr = -\frac{1}{8}a^4$$

(d) Sur D_{xz} la normale unitaire orientée vers l'extérieure est $\overrightarrow{n_{xy}} = -\overrightarrow{j}$.

$\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n_{xz}}ds = -\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{j}\,ds = -zxdxdz$

En passant vers les coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & z = r\sin\theta \\ 0 \le r \le a & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et } dxdy = rdrd\theta$$

$$-zxdxdz = -r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta$$

$$\Phi_{xz} = \iint_{D_{yz}}\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{n_{xz}}ds = -\iint_{D_{yz}} zxdxdz$$

$$= -\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2} r^3\cos\theta\sin\theta d\theta\right)dr = -\frac{1}{8}a^4$$

$$\Phi = \Phi_S + \Phi_{xy} + \Phi_{yz} + \Phi_{xz}$$

$$= -\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)a^4 + \left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)a^4 - \frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{8}a^4 = -\frac{1}{8}\pi a^4$$

8. (Δ) est une surface fermée, et $\overrightarrow{V}$ est continue sur (Δ) et dans (Σ) alors on peut appliquer la formule d'Ostrogradski.

9. $\Phi = \iint\limits_{(\Delta)} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \iiint\limits_{\Sigma} \operatorname{div} \overrightarrow{V}\, dxdydz = -\iiint\limits_{\Sigma} 2z dxdydz$

En coordonnées sphériques: $z = r\cos\theta$, $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

$\Longrightarrow 2z dxdydz = 2r^3 \cos\theta \sin\theta dr dd\varphi$

$0 \le r \le a \qquad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \qquad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\Phi = -\int_0^a \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} 2r^3 \cos\theta \sin\theta d\varphi \right) d\theta \right) dr$$

$$= \left(-\int_0^a r^3 dr \right) \left(\left(\int_0^{\pi/2} (\cos\theta \sin\theta)\, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} 2d\varphi \right) \right) = -\frac{1}{8}\pi a^4$$