Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Algèbre linéaire et Géométrie (MVA107)

Examen Final Semestre II 2010-2011

Documents autorisés : Notes de Cours de N.ASSAAD **Durée : 3 h**

Sujet coordonné par : N. ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Bickfaya

Exercice 1 (20 points) ***On considère la matrice:*** $M=\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}$

1. ***Calculer*** M^2, M^3 ***et en déduire*** M^n.

   Réponse. $M^2=\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}=M$

   $M^3=M^2M=MM=M^2=M$

   Alors $M^n=M$

2. ***Calculer les valeurs propres de*** M ***et les vecteurs propres associés.***

   Réponse. *Le polynôme caractéristique de* M *est*

   $P(\lambda)=\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&1\\4&-1-\lambda&2\\-2&1&-\lambda\end{vmatrix}$

   $=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=-\lambda\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=-\lambda(\lambda-1)^2$

   Les valeurs proprs sont telles que $P(\lambda)=0\Longrightarrow\lambda_1=0$ *et* $\lambda_{2,3}=1$

   Les vecteurs propres sont V_i *tels que* $MV_i=\lambda_iV_i$

   $\lambda_1=0\leftrightarrow V_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \lambda_{2,3}=1\leftrightarrow V_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},V_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

3. ***Calculer*** $\exp(Mt)$ ***où*** t ***est une variable réelle.***

   Réponse. $\exp(Mt)=I+Mt+\frac{M^2t^2}{2!}+\frac{M^3t^3}{3!}+\frac{M^4t^4}{4!}+\frac{M^5t^5}{5!}+\cdots$

   $=I+Mt+\frac{Mt^2}{2!}+\frac{Mt^3}{3!}+\frac{Mt^4}{4!}+\frac{Mt^5}{5!}+\cdots=I+M\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots\right)$

   On a $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots\Longrightarrow t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots=e^t-1$

   Par suite $\exp(Mt)=I+M\left(e^t-1\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1&1\\4&-1&2\\-2&1&0\end{pmatrix}\left(e^t-1\right)=$

   $\begin{pmatrix}3e^t-2&1-e^t&e^t-1\\4e^t-4&2-e^t&2e^t-2\\2-2e^t&e^t-1&1\end{pmatrix}$

4. ***Soit le système différentiel :***

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y \end{cases} \qquad (S)$$

5. ***Résoudre le système*** (S)

   (a) ***En utilisant la matrice exponentielle***
   Réponse. $Y = e^{MT}C$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2 & 1 - e^t & e^t - 1 \\ 4e^t - 4 & 2 - e^t & 2e^t - 2 \\ 2 - 2e^t & e^t - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C\left(e^t - 1\right) - B\left(e^t - 1\right) + A\left(3e^t - 2\right) \\ A\left(4e^t - 4\right) - B\left(e^t - 2\right) + C\left(2e^t - 2\right) \\ C + B\left(e^t - 1\right) - A\left(2e^t - 2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B - 2A - C + (3A - B + C)\, e^t \\ 2B - 4A - 2C + (4A - B + 2C)\, e^t \\ 2A - B + C + (-2A + B)\, e^t \end{pmatrix}$$

   (b) ***En utilisant les vecteurs propres***

   Réponse. $Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} C_k V_k \exp\left(\lambda_k t\right)$

$$= C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t$$

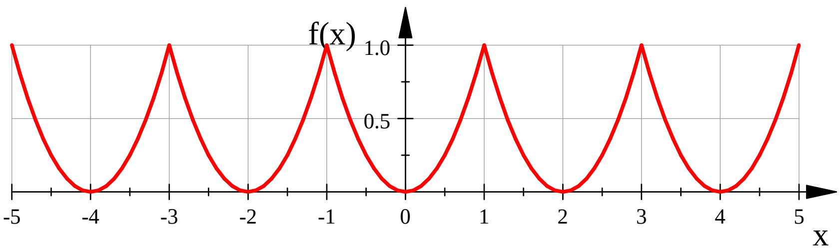
$$= \begin{pmatrix} e^t \left(\frac{1}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_3 \right) - C_1 \\ C_2 e^t - 2C_1 \\ C_1 + C_3 e^t \end{pmatrix}$$

Remarque 1 *Pour comparer les deux solutions on pose* $C_1 = 2A - B + C, C_2 = 4A - B + 2C$ *et* $C_3 = -2A + B$

Exercice 2 (25 points) ***On considère la fonction*** $f(x)$ ***périodique de période*** $T = 2$ ***définie par*** $f(x) = x^2$ ***sur*** $[-1, 1]$.

1. ***Tracer le graphe de*** $f(x)$ ***sur l'intervalle*** $[-5, 5]$.

   Réponse.



2. ***Développer la fonction*** $f(x)$ ***en série réelle de Fourier.***

   Réponse. $T = 2 \Rightarrow \omega = \pi$

   $f(x) = x^2$ *est une fonction paire* $\Rightarrow b_n = 0\ \forall n$

   $$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos n\omega x dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x dx = 2\int_{0}^{1} x^2 \cos n\pi x dx$$

   $$= 2x^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 2x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\, dx = -\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx$$

   $$= \frac{4}{n^3\pi^3}\left(-\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi = 4\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

   $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

   $f(x)$ *est continue sur* $[-1, 1]$

   $$\Rightarrow f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2}.$$

3. ***Déduire la série de Fourier de*** $g(x) = x$ ***définies sur*** $[-1, 1]$.

   Réponse. $g(x) = x = \frac{1}{2}\frac{df}{dx}$

   $$\Longrightarrow S_g(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\pi x}{n^2}\right) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\pi x}{n}$$

4. ***Calculer l'énergie du signal caractérisé par*** $f(x)$.

   Réponse. *L'énergie est donnée par :* $E = \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$

5. ***Calculer les sommes:***

   $$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}; \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

   Réponse. *D'après la formule de Parseval:*

   $$E = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

   $$\Rightarrow \frac{2}{5} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(4\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

   $$\Rightarrow S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{16}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

   Dans la série associée à $f(x)$ *on fait* $x = 0$

   $$\Rightarrow f(0) = 0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}S_2 \Rightarrow S_2 = -\frac{\pi^2}{12}$$

De même pour $x = 1$:

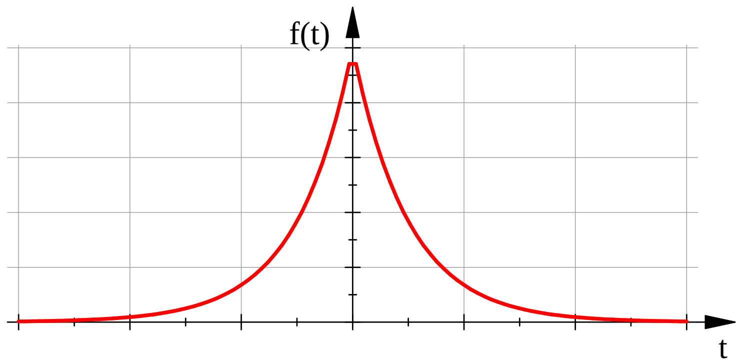
$$f(1) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{n^2}. = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} S_3$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 3 (15 points) ***Soit f la fonction définie sur R par : $f(t) = e^{-\lambda|t|}$ où λ est une constante positive.***

1. ***Tracer le graphe de $f(t)$***

   Réponse.



2. ***Montrer que la transformée de Fourier de $f(t)$ est $F(\nu) = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}$.***

   Réponse. $F(\nu) = \int_{-\infty}^{0} \left(e^{\lambda t}\right) e^{-2j\pi\nu t} dt + \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda t}\right) e^{-2j\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda - 2j\pi\nu)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda + 2j\pi\nu)t} dt$

$$= \left.\frac{e^{(\lambda-2j\pi\nu)t}}{\lambda - 2j\pi\nu}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(\lambda+2j\pi\nu)t}}{\lambda + 2j\pi\nu}\right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\lambda - 2j\pi\nu} + \frac{1}{\lambda + 2j\pi\nu} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}$$

3. ***En utilisant les propriétés, déduire les transformées de Fourier des fonctions***

$$f_1(t) = (t - a)\, e^{-|t-a|} \quad et \; f_2(t) = e^{-2|t|} \cos 4\pi t$$

   a est une constante positive.

   Réponse. *Soit* $g(t) = te^{-\lambda|t|}$

$$\Longrightarrow G(\nu) = -\frac{1}{2j\pi}\frac{dF}{d\nu} = -\frac{1}{2j\pi}\frac{d}{d\nu}\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}\right) = -j\frac{8\lambda\pi\nu}{\left(\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2\right)^2}$$

   théorème de translation : $f_1(t) = g(t - a)$

$$\Longrightarrow F_1(\nu) = G(\nu)\exp(-2j\pi\nu a) = -j\frac{8\lambda\pi\nu \exp(-2j\pi\nu a)}{\left(\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2\right)^2}$$

   théorème de modulation : $\mathcal{F}(f(t)\cos 2\pi a t) = \dfrac{F(\nu + a) + F(\nu - a)}{2}$

$$\lambda = 2 \Longrightarrow F(\nu) = \frac{4}{4+4\pi^2\nu^2} = \frac{1}{1+\pi^2\nu^2}$$

$$a = 2 \Longrightarrow F_2(\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\pi^2(\nu+2)^2} + \frac{1}{1+\pi^2(\nu-2)^2}\right)$$

4. ***Déduire la valeur de l'intégrale*** $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{1+t^2} dt$

Réponse. *La transformée inverse de* $F(\nu)$ *est* $f(t)$ *donc :*

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(2j\pi\nu t)\, d\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2\nu^2}\exp(2j\pi\nu t)\, d\nu$$

Pour $\lambda = 2\pi \rightarrow f(t) = e^{-2\pi|t|}$

$$\Longrightarrow e^{-2\pi|t|} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{4\pi^2+4\pi^2\nu^2}\exp(2j\pi\nu t)\, d\nu = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\nu^2}\exp(2j\pi\nu t)\, d\nu$$

Posons $\omega = 2\pi t \Longrightarrow$ *et* $x = \nu$

$$\Longrightarrow e^{-|\omega|} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x) + j\sin(\omega x)}{1+x^2} dx \Longrightarrow$$

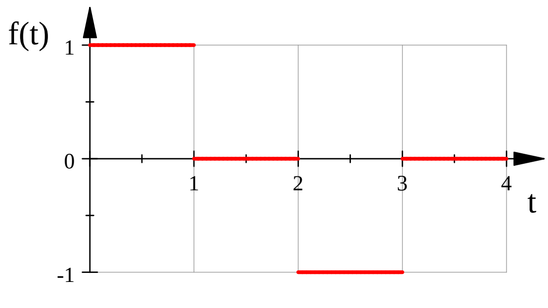
$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\omega|}$$

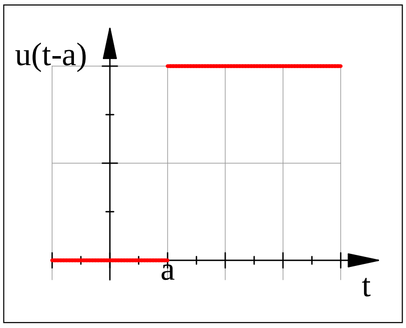
Exercice 4 (25 points) ***On considère les fonctions***

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 < t < 1 \\ -1 & si\ \ 2 < t < 3 \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \qquad et\ \ u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 1 & si\ \ t > a \\ 0 & si\ \ t < a \end{cases}$$

1. **Tracer le graphe de $f(t)$ et préciser les points de discontinuité.**

Réponse. :





les points de discontinuités: $t = 0, 1, 2$ et 3

2. **Calculer, par intégration, la transformée de Laplace de $f(t)$.**

Réponse. $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt = \int\limits_0^{1} e^{-pt} dt - \int\limits_2^{3} e^{-pt} dt$

$$= -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^1 + \left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_2^3 = -\frac{1}{p}\left(e^{-p}-1\right) + \frac{1}{p}\left(e^{-3p}-e^{-2p}\right) = \frac{e^{-3p}-e^{-2p}-e^{-p}+1}{p}$$

3. **Déduire les transformées de Laplace des fonctions :**

$$f_1(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ -t & \text{si } 2 < t < 3 \\ 0 & \textit{Ailleurs} \end{cases} \quad \text{et } f_2(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } 0 < t < 1 \\ -e^t & \text{si } 2 < t < 3 \\ 0 & \textit{Ailleurs} \end{cases}$$

Réponse. $f_1(t) = tf(t) \Longrightarrow \mathcal{L}(f_1) = -\dfrac{dF}{dp} = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{e^{-3p} - e^{-2p} - e^{-p} + 1}{p}\right)$

$= \dfrac{1}{p^2}\left((3p+1)e^{-3p} - (2p+1)e^{-2p} - (1+p)e^{-p} + 1\right)$

$f_2(t) = e^t f(t) \Longrightarrow \mathcal{L}(f_1) = F(p-1)$

4. **Exprimer $f(t)$ à l'aide de l'échelon unité $u_a(t)$ et retouver sa transformée de Laplace.**

Réponse. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 & \to u(t) - u(t-1) \\ -1 & \text{si } 2 < t < 3 & \to -(u(t-2) - u(t-3)) \end{cases}$

$f(t) = u(t) - u(t-1) - u(t-2) + u(t-3)$

La transformée de Laplace de $u(t-a)$ est $U_a(P) = \dfrac{e^{-ap}}{p}$

Donc $F(p) = U_0(p) - U_1(p) - U_2(p) + U_3(p)$

$F(p) = \dfrac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$

5. **Soit la fonction $H_\alpha(p) = \dfrac{e^{-\alpha p}}{p^3 - p^2 - 6p}$ la transformée de Laplace de la fonction $h_\alpha(t)$. Déterminer $h_\alpha(t)$.**

Réponse. $H_0(p) = \dfrac{1}{p^3 - p^2 - 6p} = \dfrac{1}{p(p^2 - p - 6)}$

Les racines de $p^2 - p - 6 = 0$ sont 3 et $-2 \Longrightarrow p^2 - p - 6 = (p+2)(p-3)$

$H_0(p) = \dfrac{1}{p(p+2)(p-3)} = \left(\dfrac{1}{10(p+2)} + \dfrac{1}{15(p-3)} - \dfrac{1}{6p}\right)$

$h_0(t) = \left(\dfrac{e^{-2t}}{10} + \dfrac{e^{3t}}{15} - \dfrac{1}{6}\right)u(t)$

$h_\alpha(t) = \left(\dfrac{e^{-2(t-\alpha)}}{10} + \dfrac{e^{3(t-\alpha)}}{15} - \dfrac{1}{6}\right)u(t-\alpha)$

6. **En utilisant la transformation de Laplace, résoudre l'équation différentielle: $y'' - y' - 6y = f(t)$ sachant que $y'(0) = y(0) = 0$.**

Réponse. $y'' - y' - 6y = f(t) \Longrightarrow \pounds(y'') - \pounds(y') - 6\pounds(y) = \pounds(f)$

soit $Y = \pounds(y)$

$\pounds(y') = pY - y(0) = pY$

$\pounds(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y$

En remplaçant, on obtient:

$$p^2Y - pY - 6Y = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$$

$$\left(p^2 - p - 6\right) Y = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p}$$

$$Y = \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}}{p\left(p^2 - p - 6\right)} = H_0(p) - H_1(p) - H_2(p) + H_3(p)$$

$$y(t) = h_0(t) - h_1(t) - h_2(t) + h_3(t)$$

Exercice 5 (15 points) ***On considère la surface*** (Σ) ***fermée et constituée par :*** ***la demi sphère*** (S) ***:*** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ***et*** $z \geq 0$ ***et le disque*** $(D) : x^2 + y^2 = R^2$ ***Soit*** $\overrightarrow{H} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ ***un champ vectoriel définie sur*** (Σ)

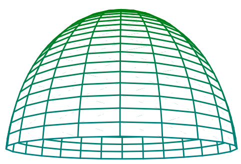
1. ***Calculer*** $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ ***et*** $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$.

   Réponse. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial(2x)}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 2 + 1 + 1 = 4$

   $$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

2. ***Calculer, à l'aide d'une intégrale de surface, le flux à travers*** (Σ) ***du champ vectoriel*** $\overrightarrow{H}$

   Réponse.



$$\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\,ds \quad \textit{pour } \overrightarrow{n} \textit{ orientée vers l'extérieure}$$

Réponse. *Sur* $(S) : \overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{R}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{1}{R}\left(2x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{R}\left(x^2 + R^2\right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(R^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + R^2\right) = R\left(\cos^2\varphi \sin^2\theta + 1\right)$$

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta \quad \textit{où : } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \textit{et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma'} R\left(\cos^2\varphi \sin^2\theta + 1\right) R^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2\varphi \sin^2\theta + 1\right) \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi = \frac{8}{3}\pi R^3$$

Sur $(D) : \overrightarrow{n} = -\overrightarrow{k} \Longrightarrow \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = -z^2 = 0$

3. ***Retrouver le flux de $\overrightarrow{H}$ en utilisant la formule d'Ostrogradski.***

Réponse. $\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \underset{V}{\iiint} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} dxdxydz$

$= \underset{V}{\iiint} 4dxdxydz = 4 \underset{V}{\iiint} dxdxydz = 4v$

v est le volume de la démi-sphère $(z \geq 0) = \dfrac{2}{3}\pi R^3$

$\Longrightarrow \Phi = 4\left(\dfrac{2}{3}\pi R^3\right) = \dfrac{8}{3}\pi R^3$