Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Partiel Semestre II 2010-2011

Solutions + Barèmes

Exercice 1 (20 points) *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que: $A^2 = B^2 = \left[\frac{1}{2}(A+B)\right]^2$
2. Déduire A^{-1} et B^{-1}
3. Calculer $\exp(C)$ où $C = A - B$

Solution 1 *:*

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I \quad \boxed{2}$

   $B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I \quad \boxed{2}$

   $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 10 & -6 & 10 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \boxed{1}$

   $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 10 & -6 & 10 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 10 & -6 & 10 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I \quad \boxed{2}$

   d'où: $A^2 = B^2 = \left[\frac{1}{2}(A+B)\right]^2 \quad \boxed{1}$

2. $A^2 = 4I \Longrightarrow A^2 \times A^{-1} = 4IA^{-1} \Longrightarrow A = 4A^{-1} \quad \boxed{1}$

   $\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \boxed{2}$

   de même $B^{-1} = \frac{1}{4}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{2}$

3. Par définition $\exp(C) = I + C + \dfrac{C^2}{2!} + \dfrac{C^3}{3!} + \cdots$ $\boxed{2}$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^n = 0 \quad \forall n \geq 2 \quad \boxed{2}$$

$$\Longrightarrow \exp(C) = I + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 8 & -8 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & -10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -8 \\ 2 & -1 & 2 \\ 10 & -10 & 11 \end{pmatrix} \quad \boxed{2}$$

Exercice 2 (25 points) *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme : $P(\lambda) = \left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 - 9\right)$
2. Calculer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
3. Déduire la solution du système différentiel:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3u + 2y \\ \dfrac{du}{dt} = z \end{cases}$$

Solution 2 *:*

1. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

   $= -\lambda\left(7\lambda - \lambda^3\right) - \left(3\lambda^2 - 9\right) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 3)$ $\boxed{5}$

2. Les valeurs propres sont telles que $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, -1, 3, -3$ $\boxed{2}$

   Les vecteurs propres sont V_i tels que $AV_i = \lambda_i V_i$

   Soit pour $\lambda_1 = 1 \longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b = a \\ 3a + 2c = b \\ 2b + 3d = c \\ c = d \end{cases} \Longrightarrow a = b = -c = -d \text{ soit } v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{2}$$

de même on trouve :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = -1, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 3 \text{ et } \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_4 = -3$$

$\boxed{2+2+2}$

3. $Y' = AY$ donc la solution est de la forme : $Y = \sum_{k=1}^{4} C_k V_k \exp(\lambda_k t)$ $\boxed{2}$

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \boxed{3}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} - C_4 e^{-3t} \\ y(t) &= -C_1 e^t - C_2 e^{-t} + 3C_3 e^{3t} + 3C_4 e^{-3t} \\ z(t) &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} + 3C_3 e^{3t} - 3C_4 e^{-3t} \\ u(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} + C_4 e^{-3t} \end{aligned} \quad \boxed{5}$$

Exercice 3 (55 points) *On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par:*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, x + 2y + z, -x - y)$$

On pose $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\ fois}$ *et on désigne par E la base canonique de* $\mathbb{R}^3$

1. Calculer $(f \circ f)(x, y, z)$ et $(f \circ f \circ f)(x, y, z)$
2. Déterminer $A = M(f, E)$
3. Déterminer $M(f^{\circ n}, E)$, on distingue les cas où n est pair ou impair
4. Déduire A^n
5. Montrer que A est inversible, et calculer son inverse.
6. Déduire la solution du système linéaire:

$$\begin{cases} -x - 2y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -x - y = 3 \end{cases}$$

7. Déterminer $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A, et Vérifier que $P(A) = O$
8. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A
9. Calculer $\exp(At)$

10. Déduire par deux méthodes la solution du système différentiel:

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y - 2z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 2y + z$$
$$\frac{dz}{dt} = -x - y$$

Solution 3 $f(x,y,z) = (-x-2y-2z, x+2y+z, -x-y) = (X,Y,Z)$

1. $(f \circ f)(x,y,z) = f(f(x,y,z)) = f(X,Y,Z) = (-X-2Y-2Z, X+2Y+Z, -X-Y)$

$$\left.\begin{array}{r} -X-2Y-2Z = -(-x-2y-2z) - 2(x+2y+z) - 2(-x-y) = x \\ X+2Y+Z = (-x-2y-2z) + 2(x+2y+z) + (-x-y) = y \\ -X-Y = -(-x-2y-2z) - (x+2y+z) = z \end{array}\right\} \boxed{5}$$

$\Longrightarrow (f \circ f)(x,y,z) = (x,y,z)$

par suite :

$(f \circ f \circ f)(x,y,z) = f((f \circ f)(x,y,z)) = f(x,y,z)$ $\boxed{2}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$

3. D'après la première question : $f^{\circ n} = \begin{cases} \mathbb{I} & si \quad n \text{ est pair} \\ f & si \quad n \text{ est impair} \end{cases}$ $\boxed{2}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} f^{\circ 2k}(x,y,z) = (x,y,z) \\ f^{\circ(2k+1)}(x,y,z) = (-x-2y-2z, x+2y+z, -x-y) \end{cases}$ $\boxed{2}$

4. $A^n = M(f^{\circ n}, E) = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$ $\boxed{2}$

5. $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow A$ est inversible $\boxed{2}$

Puisque $A^2 = I$ alors $A^{-1} = A$ $\boxed{2}$

6. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

alors le système s'écrit : $AX = B$ donc

$X = A^{-1}B = AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 8 \\ z = -3 \end{cases}$ $\boxed{2}$

7. $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ $\boxed{5}$

$P(A) = -A^3 + A^2 + A - I = -A + I + A - I = O$ $\boxed{2}$

8. Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = 1$ (*double*) et $\lambda_3 = -1$ (*simple*) $\boxed{2}$

$$\lambda_{1,2} = 1 \to v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = -1 \to v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{3}$$

9. On peut calculer $\exp(At)$ par deux méthodes:

i) $\exp(At) = Q\exp(Dt)\,Q^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \exp(Dt) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{2}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{5}$$

$$\exp(At) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{-t} & 2e^{-t} - 2e^t & 2e^{-t} - 2e^t \\ e^t - e^{-t} & 3e^t - e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^{-t} - e^t & e^{-t} - e^t & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{5}$$

ii) $\exp(At) = I + At + \dfrac{A^2t^2}{2!} + \dfrac{A^3t^3}{3!} + \dfrac{A^4t^4}{4!} + \dfrac{A^5t^5}{5!} + \cdots$

$\boxed{2}$ $$= I + At + I\frac{t^2}{2!} + A\frac{t^3}{3!} + I\frac{t^4}{4!} + A\frac{t^5}{5!} + \cdots$$

$\boxed{2}$ $$= I\left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots\right) + A\left(t + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right)$$

Or:

$\boxed{2}$ $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = t + \dfrac{1}{3!}t^3 + \dfrac{1}{5!}t^5 + \dfrac{1}{7!}t^7 + \cdots$

$\boxed{2}$ $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = 1 + \dfrac{1}{2!}t^2 + \dfrac{1}{4!}t^4 + \dfrac{1}{6!}t^6 + \cdots$

$\Longrightarrow \exp(At) = I\cosh t + A\sinh t$

$$= I\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) + A\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$$

$\boxed{2}$ $$= \frac{1}{2}\left((I + A)\,e^t + (I - A)\,e^{-t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)e^t + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)e^{-t}\right]$$

$$\boxed{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{-t} & 2e^{-t} - 2e^t & 2e^{-t} - 2e^t \\ e^t - e^{-t} & 3e^t - e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^{-t} - e^t & e^{-t} - e^t & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

10. solution du système:

- $$Y = e^{At}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{-t} & 2e^{-t}-2e^{t} & 2e^{-t}-2e^{t} \\ e^{t}-e^{-t} & 3e^{t}-e^{-t} & e^{t}-e^{-t} \\ e^{-t}-e^{t} & e^{-t}-e^{t} & e^{t}+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\left(C_2+C_3\right)e^{t}+2\left(C_1+C_2+C_3\right)e^{-t} \\ \left(C_1+3C_2+C_3\right)e^{t}-\left(C_1+C_2+C_3\right)e^{-t} \\ \left(-C_1-C_2+C_3\right)e^{t}+\left(C_1+C_2+C_3\right)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x\left(t\right) = -\left(C_2+C_3\right)e^{t}+\left(C_1+C_2+C_3\right)e^{-t} \\ y\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(C_1+3C_2+C_3\right)e^{t}-\frac{1}{2}\left(C_1+C_2+C_3\right)e^{-t} \\ z\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(C_3-C_2-C_1\right)e^{t}+\frac{1}{2}\left(C_1+C_2+C_3\right)e^{-t} \end{cases} \quad \boxed{5}$$

- $$Y = \sum_{k=1}^{3} C'_k V_k \exp\left(\lambda_k t\right) = \left[C'_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C'_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]e^{t} + C'_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$$
$$= \begin{pmatrix} -\left(C'_1+C'_2\right)e^{t}+2C'_3e^{-t} \\ C'_1e^{t}-C'_3e^{-t} \\ C'_2e^{t}+C'_3e^{-t} \end{pmatrix} \quad \boxed{5}$$

Remarque: si on pose $C'_1 = \frac{1}{2}\left(C_1+3C_2+C_3\right)$ et $C'_2 = \frac{1}{2}\left(C_3-C_2-C_1\right)$ on retrouve les mêmes constantes précédentes