Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen de rattrapage 2010-2011 Durée : 3h:00

Sujet coordonné par : Dr. Noureddine ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Bickfaya

Documents autorisés : Notes de Cours de N.ASSAAD

Téléphones, Cahiers, Exercices résolus, Séssions: strictement interdits

---

Exercice 1 *On considère la fonction $f(t)$ définie par:*

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 < t < 1 \\ 1 & si \quad 1 < t < 2 \\ 3-t & si \quad 2 < t < 3 \end{cases} \quad \textit{et nulle ailleurs}$$

1. Tracer le graphe et calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$
2. Déduire les transformées de Laplace des fonctions:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 & si \quad 0 < t < 1 \\ t & si \quad 1 < t < 2 \\ 3t - t^2 & si \quad 2 < t < 3 \end{cases} \quad \text{et nulle ailleurs}$$

$$h(t) = \begin{cases} te^{2t} & si \quad 0 < t < 1 \\ e^{2t} & si \quad 1 < t < 2 \\ (3-t)\,e^{2t} & si \quad 2 < t < 3 \end{cases} \quad \text{et nulle ailleurs}$$

3. Déterminer la fonction $k_a(t)$ dont sa transormée de Laplace est

$$K_a(p) = \frac{e^{ap}}{p^4 - 2p^3 + 5p^2}$$

   où a est un réel.

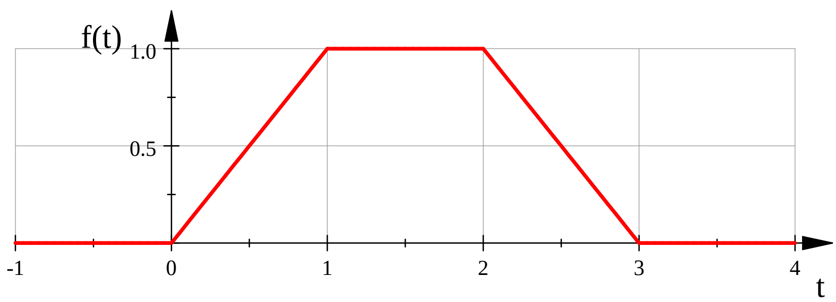
4. En déduire en fonction de $k_a(t)$ (pour différentes valeurs de a) la solution de l'équation différentielle:

$$y'' - 2y' + 5y = f(t)$$

   vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

Solution 1 *:*

1. Graphe:



$$F(p)=\int_0^1 te^{-pt}dt+\int_1^2 e^{-pt}dt+\int_2^3(3-t)e^{-pt}dt=\frac{e^{-3p}-e^{-2p}-e^{-p}+1}{p^2}$$

2. $g(t)=tf(t)\Longrightarrow G(p)=-\frac{d}{dp}F(p)$

   $h(t)=e^{2t}f(t)\Longrightarrow H(p)=F(p-2)$

3. $K_a(p)=\dfrac{e^{ap}}{p^4-2p^3+5p^2}$

$$K_0(p)=\frac{1}{p^4-2p^3+5p^2}=\frac{1}{p^2(p^2-2p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{CP+D}{p^2-2p+5}$$

$$=\frac{2}{25p}+\frac{1}{5p^2}-\frac{\frac{2}{25}p+\frac{1}{25}}{p^2-2p+5}$$

$$=\frac{2}{25p}+\frac{1}{5p^2}-\frac{\frac{2}{25}p+\frac{1}{25}}{p^2-2p+1+4}$$

$$=\frac{2}{25p}+\frac{1}{5p^2}-\frac{1}{25}\left(\frac{2(p-1)+3}{(p-1)^2+4}\right)$$

$$=\frac{2}{25p}+\frac{1}{5p^2}-\frac{1}{25}\left(\frac{2(p-1)}{(p-1)^2+4}+\frac{3}{(p-1)^2+4}\right)$$

$$\Longrightarrow k_0(t)=\left(\frac{2}{25}+\frac{t}{5}-\frac{1}{25}\left(2e^t\cos 2t+\frac{3}{2}e^t\sin 2t\right)\right)u(t)$$

$$K_a(p)=e^{ap}K_0(p)\Longrightarrow k_a(t)=k_0(t+a)$$

4. $y''-2y'+5y=f(t)\longrightarrow\left(p^2-2p+5\right)Y=F(p)=\dfrac{e^{-3p}-e^{-2p}-e^{-p}+1}{p^2}$

$$Y(p)=\frac{e^{-3p}-e^{-2p}-e^{-p}+1}{p^2(p^2-2p+5)}=K_{-3}(p)-K_{-2}(p)-K_{-1}(p)+K_0(p)$$

$$y(t)=k_{-3}(t)-k_{-2}(t)-k_{-1}(t)+k_0(t)$$

Exercice 2 *On considère la fonction:*

$$f(t)=\begin{cases}(2+t) & si \quad -2<t<0\\(2-t) & si \quad 0<t<2\\0 & si \quad |t|>2\end{cases}$$

1. Montrer que

$$I(a,b,k)=\int_a^b xe^{-kx}dx=\frac{(1+ak)e^{-ak}-(1+bk)e^{-bk}}{k^2}$$

   où a,b sont réels et $k\in\mathbb{C}$.

2. Tracer le graphe de $f(t)$

3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$

4. Déduire la valeur de l'intégrale :

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2dy$$

Solution 2 *:*

1. Intégration par parties : $\begin{cases} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^{-kx}dx & \Longrightarrow & v = -\dfrac{1}{k}e^{-kx} \end{cases}$

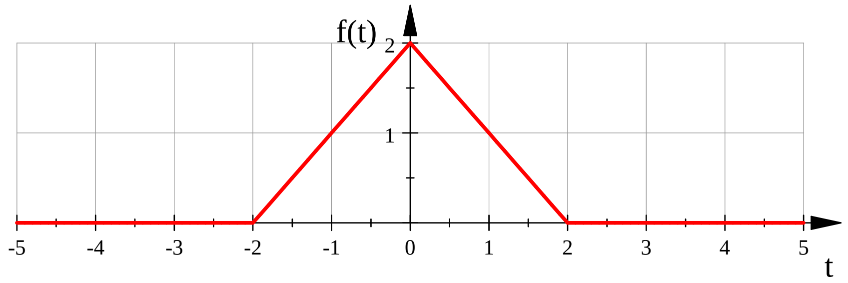
$$I = -\frac{x}{k}e^{-kx}\Big|_a^b + \frac{1}{k}\int_a^b e^{-kx}dx = -\frac{1}{k}\left(be^{-kb} - ae^{-ka}\right) - \frac{1}{k^2}e^{-kx}\Big|_a^b$$

$$= -\frac{1}{k}\left(be^{-kb} - ae^{-ka}\right) - \frac{1}{k^2}\left(e^{-kb} - e^{-ka}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(e^{-ak} - e^{-bk}\right) + \frac{1}{k^2}\left(ake^{-ak} - bke^{-bk}\right)$$

$$I(a,b,k) = \frac{(1+ak)\,e^{-ak} - (1+bk)\,e^{-bk}}{k^2}$$

2. Graphe:



3. $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt = \int_{-2}^{0}(2+t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt + \int_{0}^{2}(2-t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt$

$$= \int_{-2}^{2}(2)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt + \int_{-2}^{0}(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt - \int_{0}^{2}(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt$$

$$\int_{-2}^{2}(2)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt = \frac{2}{\pi\nu}\sin 4\pi\nu$$

on a $I(a,b,k) = \dfrac{(1+ak)\,e^{-ak} - (1+bk)\,e^{-bk}}{k^2}$

$$\int_{-2}^{0}(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt = I(-2,0,2j\pi\nu) = \frac{(1-4j\pi\nu)\,e^{4j\pi\nu} - 1}{-4\pi^2\nu^2}$$

$$\int_{0}^{2}(t)\exp(-2j\pi\nu t)\,dt = I(0,2,2j\pi\nu) = \frac{1 - (1+4j\pi\nu)\,e^{-4j\pi\nu}}{-4\pi^2\nu^2}$$

$$F(\nu) = \frac{2}{\pi\nu}\sin 4\pi\nu - \frac{(1-4j\pi\nu)\,e^{4j\pi\nu} - 1}{4\pi^2\nu^2} + \frac{1 - (1+4j\pi\nu)\,e^{-4j\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2}$$

$$= \frac{2}{\pi\nu}\sin 4\pi\nu + \frac{1 - (1-4j\pi\nu)\,e^{4j\pi\nu} + 1 - (1+4j\pi\nu)\,e^{-4j\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2}$$

$$= \frac{2}{\pi\nu}\sin 4\pi\nu + \frac{2 - \left(e^{4j\pi\nu} + e^{-4j\pi\nu}\right) + 4j\pi\nu\left(e^{4j\pi\nu} - e^{-4j\pi\nu}\right)}{4\pi^2\nu^2}$$

$$= \frac{8\pi\nu \sin 4\pi\nu}{4\pi^2\nu^2} + \frac{2 - 2\cos 4\pi\nu - 8\pi\nu \sin 4\pi\nu}{4\pi^2\nu^2} = \frac{1 - \cos 4\pi\nu}{2\pi^2\nu^2} = \frac{2\sin^2 2\pi\nu}{2\pi^2\nu^2} = 4\left(\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}\right)^2$$

$$\text{ou } F(\nu) = \int_{-2}^{2} (2 - |t|) \exp(-2j\pi\nu t)\, dt = \frac{1 - \cos 4\pi\nu}{2\pi^2\nu^2} = 4\left(\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}\right)^2$$

4. $\text{T.F.I} \Longrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}\right)^2 e^{2j\pi\nu} d\nu \Longrightarrow f(0) = 2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}\right)^2 d\nu$

   on pose $y = 2\pi\nu \Longrightarrow dy = 2\pi d\nu$

   $$2 = \int_{-\infty}^{\infty} 4\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \frac{dy}{2\pi} \Longrightarrow J = \pi$$

Exercice 3 *Soit la matrice :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\exp Mt$ où t est une variable réelle.
3. Résoudre le système différentiel:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + s \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - s \\ \dfrac{ds}{dt} = -x + z + s \end{cases}$$

Solution 3 *:*

1. $$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^n = O,\ \forall n > 1$$

2. $\exp(Mt) = I + Mt + \frac{1}{2}M^2t^2 + \frac{1}{6}M^3t^3 + \cdots$

   $$\Longrightarrow \exp(Mt) = I + Mt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 & t \\ t & t & 1 & -t \\ -t & 0 & t & t+1 \end{pmatrix}$$

3. $$Y(t) = \exp(Mt)\, V = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 & t \\ t & t & 1 & -t \\ -t & 0 & t & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt + Ct \\ tD - B(t-1) - At \\ C - tD + At + Bt \\ D(t+1) - At + Ct \end{pmatrix}$$