Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Final Semestre II 2011-2012

Mardi 26 juin 2012 17h:00→20h:00

Documents autorisés : Notes de Cours de N.ASSAAD

Cahiers, exercices résolus, sessions, téléphones : strictement interdits

Sujet coordonné par : N. ASSAAD

Proposé pour les centres de: Beyrouth, Bickfaya

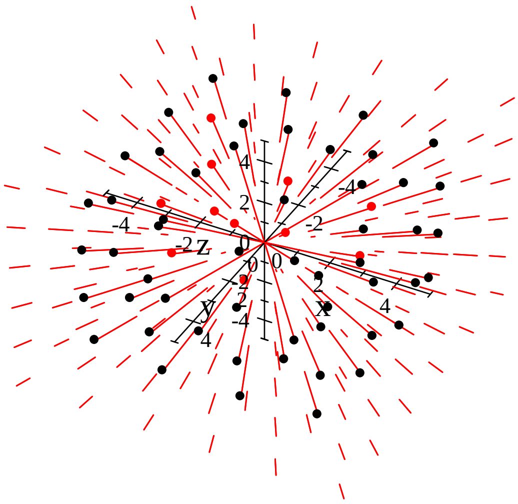
On désigne par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ le rayon vecteur au point $M\,(x, y, z)$ et $r = \|\overrightarrow{r}\|$.

Exercice 1 (15) *On considère le champ vectoriel:*

$$\overrightarrow{F}\,(M) = \frac{\overrightarrow{r}}{r^2+1} \tag{1}$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}$
2. $\overrightarrow{F}$ est-il un champ conservatif?. Justifier la réponse.
3. Déterminer le potentiel scalaire $\varphi = \varphi\,(x, y, z)$ de $\overrightarrow{F}$ tel que $\varphi\,(0) = 0$.

Solution 1 :$\overrightarrow{F}\,(M) = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r^2+1} = \overrightarrow{F}\,(M) = \dfrac{x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}}{x^2+y^2+z^2+1} = P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$



allure du champ $\overrightarrow{F}$

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2+1}\right) = \frac{-x^2+y^2+z^2+1}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} = \frac{r^2+1-2x^2}{(r^2+1)^2}$$

de même $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{r^2+1-2y^2}{(r^2+1)^2}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{r^2+1-2z^2}{(r^2+1)^2}$

$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{F}=\dfrac{r^2+1-2x^2}{(r^2+1)^2}+\dfrac{r^2+1-2y^2}{(r^2+1)^2}+\dfrac{r^2+1-2z^2}{(r^2+1)^2}=\dfrac{r^2+3}{(r^2+1)^2}$

$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}=\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}+\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j}+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$

$\dfrac{\partial R}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2+1}\right)=\dfrac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial z}$

de même on trouve

$\dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$

et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$

Donc $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$

2. $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{F}$ est un champ conservatif

3. $\exists\ \varphi=\varphi(x,y,z) \,/\, \overrightarrow{F}=\overrightarrow{\nabla\varphi}$

   $\Longrightarrow \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}=\overrightarrow{\nabla\varphi}\cdot\overrightarrow{dr}=d\varphi$

   $\varphi=\displaystyle\int d\varphi=\int\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}=\int\frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{dr}}{r^2+1}=\int\frac{rdr}{r^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right)+C$

   $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}\ln(0+1)+C=0\Longrightarrow C=0$

   $\varphi(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}$

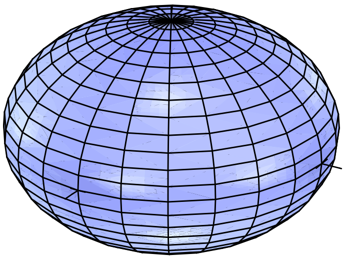
Exercice 2 (35) *On considère les deux surfaces fermées,* ***indépendantes l'une de l'autre:***

- (S_1) : *est la surface sphérique :* $r=R$.
- (S_2) *est la surface constituée par le paraboloïde* $z=R^2-x^2-y^2$ *et le disque* $x^2+y^2\le R^2$.

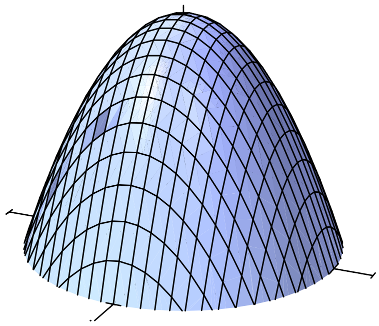
Soit $\overrightarrow{H}=2yz\overrightarrow{i}+xz\overrightarrow{j}+xy\overrightarrow{k}$ *le champ vectoriel définie et continu sur* (S_1) *et* (S_2) *et à l'intérieure de ces surfaces.*

1. Montrer que le volume d'un solide limité par la surface fermée (S) se détermine à l'aide de formule:
$$V=\frac{1}{3}\iint_S\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{dS} \qquad \text{(E)}$$
2. Calculer, alors, en utilisant la formule (E) les volumes V_1 et V_2 limités par (S_1) et (S_2).
3. Calculer $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}$
4. Calculer les flux du champ $\overrightarrow{H}$ à travers la surface (S_1) et à travers (S_2).
5. En utilisant le théorème de Stokes, calculer $\displaystyle\oint_C\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}$ où (C) est le contour de (S_2)
6. On suppose que la surface sphérique (S_1) a une densité de masse $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Calculer sa masse totale.

Solution 2 $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$



S_1



S_2

1. Formule d'Ostrogradski : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3$

$$\iint_S \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r}\, dv = \iiint_V 3dv = 3V \Longrightarrow V = \frac{1}{3}\iint_S \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{dS}$$

2. Sur la surface sphérique : la normale unitaire en un point M est $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{R}$

$$V_1 = \frac{1}{3}\iint_{S1} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{3}\iint_{S1} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \frac{1}{3}\iint_{S1} \overrightarrow{r} \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{R} dS = \frac{1}{3R}\iint_{S1} r^2 dS$$

Sur S_1 : $r = R$ et $dS = R^2 \sin^2 \theta d\theta d\varphi$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

alors :

$$V_1 = \frac{1}{3R}\iint_{\Delta 1} R^2 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta d\varphi\right) d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Sur (S_2) : la surface est définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - R^2 = 0$

$\overrightarrow{\nabla} f = 2x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ sa norme est $\left\|\overrightarrow{\nabla} f\right\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$

donc $\overrightarrow{n} = \dfrac{2x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}} \Longrightarrow \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = \dfrac{2x^2 + 2y^2 + z}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}}$

projetons sur (xOy) : $dS = \dfrac{dxdy}{|\gamma|} = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}dxdy$

$D = proj_{xoy} S = \left\{(x, y) \diagup x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}\, dS &= \left(2x^2 + 2y^2 + z\right) dxdy = \left(2x^2 + 2y^2 + R^2 - x^2 - y^2\right) dxdy \\ &= \left(x^2 + y^2 + R^2\right) dxdy \end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\iint_{S1} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \frac{1}{3}\iint_D \left(x^2 + y^2 + R^2\right) dxdy$$

En coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$: $dxdy = rdrd\theta$ avec $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$V_2 = \frac{1}{3}\iint_{\Delta 2} \left(r^2 + R^2\right) rdrd\theta = \frac{1}{3}\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(r^3 + R^2 r\right) d\theta\right) dr = \frac{1}{2}\pi R^4$$

N.B. le flux de $\overrightarrow{r}$ à traves $D = 0$

3. $\overrightarrow{H} = 2yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$

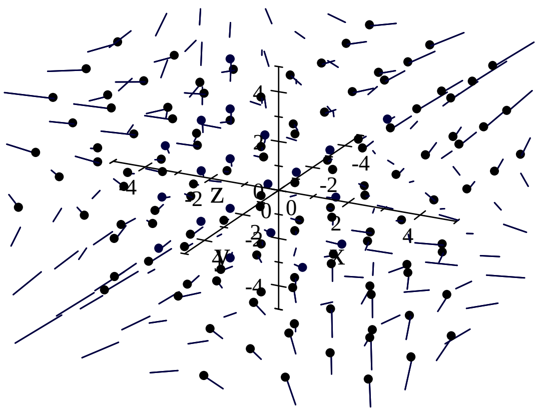
$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z} = 0$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$
$$= (x-x)\overrightarrow{i} + (2y-y)\overrightarrow{j} + (z-2z)\overrightarrow{k} = y\overrightarrow{j} - z\overrightarrow{k}$$

4. Puisque les surfaces sont fermées et $\overrightarrow{H}$ est continu donc on peut appliquer la formule d'Ostrogradski:

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} dv$$

$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0$ donc $\Phi = 0$ sur les deux surfaces



$\overrightarrow{H} = 2yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$

Remark 1 *Le calcul à l'aide d'une intégrale de surface est plus long:*

$$\overrightarrow{H}.\overrightarrow{n} = \frac{4xyz + 2xyz + xy}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} = \frac{xy(6z+1)}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}} \text{ et } dS = \frac{dxdy}{|\gamma|} = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}dxdy$$

$$\overrightarrow{H}.\overrightarrow{n}dS = xy(6z+1)dxdy = xy\left(6R^2 - 6\left(x^2+y^2\right)+1\right)dxdy$$

en coordonnées sphériques : $\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$ et $dS = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$

$$d\Phi = xy\left(6R^2 - 6x^2 - 6y^2 + 1\right)dxdy$$
$$= R^4\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\theta\left(6R^2 - 6\left((R\cos\varphi\sin\theta)^2 + (R\sin\varphi\sin\theta)^2\right)+1\right)d\theta d\varphi$$
$$= R^4\left(\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\theta\right)\left(6R^2 - 6R^2\sin^2\theta + 1\right)d\theta d\varphi$$

$$\Phi = R^4\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\theta\left(6R^2 - 6R^2\sin^2\theta+1\right)d\varphi\right)d\theta$$

$$= R^4\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^\pi\left(6R^2 - 6R^2\sin^2\theta+1\right)\sin^3\theta d\theta\right) = 0$$

5. D'après le théorème de Stokes: $\oint\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_S \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = y\,\overrightarrow{j} - z\,\overrightarrow{k}$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \dfrac{2y^2 - z}{\sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}} \left(\sqrt{4\left(x^2+y^2\right)+1}\,dxdy\right)$

   $= \left(2y^2 - z\right) dxdy = \left(2y^2 - R^2 + x^2 + y^2\right) dxdy = \left(x^2 + 3y^2 - R^2\right) dxdy$

   $\oint\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_D \left(x^2 + 3y^2 - R^2\right) dxdy$

   En coordonnées polaires : $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$: $dxdy = rdrd\theta$ avec $0 \le r \le R$ et $0 \le \theta \le 2\pi$.

   $\left(x^2 + 3y^2 - R^2\right) dxdy = \left(r^2\sin^2\theta + 3r^2\cos^2\theta - R^2\right) rdrd\theta$

   $= \left(r^2 + 2r^2\cos^2\theta - R^2\right) rdrd\theta = \left(r^3\left(1+2\cos^2\theta\right) - rR^2\right) drd\theta$

   $= \left(r^3\left(2+\cos 2\theta\right) - rR^2\right) drd\theta$

   $= \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(r^3\left(2+\cos 2\theta\right) - rR^2\right) d\theta \right) dr = 0$

6. $m = \iint\limits_S \rho dS = \iint\limits_S R^2 dS = R^2 S = 4\pi R^4$

Exercice 3 (20) *Soit la fonction causale:*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x \le 1 \\ -x+2 & si \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & si \quad x \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

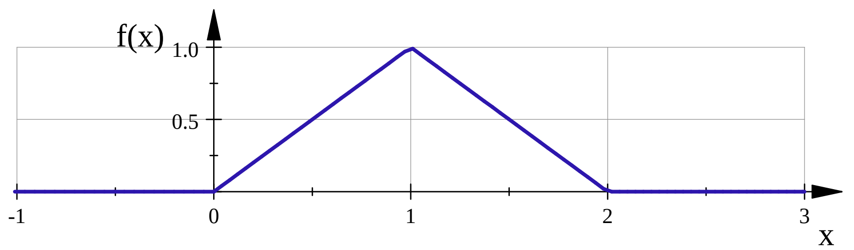
1. Tracer le graphe de $f(x)$
2. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction échelon unité.
3. Calculer la transformée de Laplace de $f(x)$.
4. On pose $G_\alpha(p) = \dfrac{e^{-\alpha p}}{p^4 - p^3 - 6p^2}$ la transformée de Lapace de la fonction $g_\alpha(x)$ .Déterminer la fonction $g_0(x)$, et déduire $g_1(x)$ et $g_2(x)$.
5. Déduire la solution de l'équation différentielle

$$y'' - y' - 6y = f(x) \tag{3}$$

   Vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

Solution 3 *:*

1. Graphe:



2. Soit $u_\alpha = u(x-\alpha) = \begin{cases} 1 & si \quad x > \alpha \\ 0 & si \quad x < \alpha \end{cases}$

   $f(x) = x(u_0 - u_1) + (-x+2)(u_1 - u_2) = 2(u_1 - u_2) + x(u_0 - 2u_1 + u_2)$

3. $\mathcal{L}(u_\alpha) = \dfrac{e^{-\alpha p}}{p} \Longrightarrow \mathcal{L}(xu_\alpha) = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}(u_\alpha) = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{e^{-\alpha p}}{p}\right) = \dfrac{1+\alpha p}{p^2}e^{-\alpha p}$

   $F(p) = 2\left(\dfrac{e^{-p}}{p} - \dfrac{e^{-2p}}{p}\right) + \dfrac{1}{p^2} - 2\dfrac{1+p}{p^2}e^{-p} + \dfrac{1+2p}{p^2}e^{-2p} = \dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p^2}$

4. $g_0(x) = \mathcal{L}^{-1}(G_0(p))$

   $G_0(p) = \dfrac{1}{p^4 - p^3 - 6p^2} = \dfrac{1}{45(p-3)} - \dfrac{1}{20(p+2)} + \dfrac{1}{36p} - \dfrac{1}{6p^2}$

   $\Longrightarrow g_0(x) = \left(\dfrac{1}{45}e^{3x} - \dfrac{1}{20}e^{-2x} - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{36}\right)u(x)$

   $G_\alpha(p) = \mathcal{L}(g_\alpha(x))$, et $g_\alpha(x) = g_0(x-\alpha)$

   $g_1(x) = g_0(x-1)$ et $g_2(x) = g_0(x-2)$

5. Posons $Y = \mathcal{L}(y)$,comme $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$:

   L'équation image s'écrit : $\left(p^2 - p - 6\right)Y = F(p)$

   $\Longrightarrow Y(p) = \dfrac{F}{p^2 - p - 6} = \dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p^2(p^2 - p - 6)} = \dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p^4 - p^3 - 6p^2} = G_2 - 2G_1 + G_0$

   $y(x) = g_2(x) - 2g_1(x) + g_0(x)$

Exercice 4 (30) *On considère la matrice* :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer B^2, B^3, en déduire $B^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de B
3. Calculer la matrice e^{Bt} où t est un réel.
4. Déduire la solution du système différentiel:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + z \end{cases}$$

Solution 4 *:*

1. $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2B$

   $B^3 = B\left(B^2\right) = B(2B) = 2B^2 = 4B = 2^2B$

   $B^4 = B^2B^2 = (2B)(2B) = 4B^2 = 8B = 2^3B$

   On démontre par réccurence que $B^n = 2^{n-1}B$, $\forall n > 0$

   Pour $n = 0$ la relation n'est pas vraie

   en effet $I = B^0 \neq 2^{0-1}B = \dfrac{1}{2}B$

2. $P(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 2\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(2-\lambda)$

   Les valeurs propores sont telles que $P(\lambda) = 0 \to \lambda_1 = 0$ (double) et $\lambda_2 = 2$ simple.

   Les vecteurs prores sont $V_i / BV_i = \lambda_i V_i$

   $\lambda_1 = 0 \to V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : BV_1 = \lambda_1 V_1 = O \Longrightarrow \begin{cases} b - a - c = 0 \\ 2b - 2a - 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = b - c$

   $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = V_1 = \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = V_1 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

   Soit: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de bases

   $\lambda_2 = 2 \to V_3 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} b' - a' - c' = 2a' \\ 2b' - 2a' - 2c' = 2b' \\ a' - b' + c' = 2c' \end{matrix} \Longrightarrow [a' = -c', b' = -2c']$

   $V_3 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c' \\ -2c' \\ c' \end{pmatrix} = c' \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\exp(Bt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1} B t^n}{n!}$

   $= I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-1} B 2^n t^n}{n!} = I + \frac{1}{2} B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = I + \frac{1}{2} B \left(e^{2t} - 1\right)$

   $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

   $= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} + 1 & -e^{2t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t} + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - e^{2t} & e^{2t} & -e^{2t} \\ -2e^{2t} & 2e^{2t} + 2 & -2e^{2t} \\ e^{2t} & -e^{2t} & e^{2t} + 2 \end{pmatrix}$

   ou autrement :

   $= I + Bt + \frac{1}{2} B^2 t^2 + \frac{1}{3!} B^3 t^3 + \frac{1}{4!} B^4 t^4 + \cdots$

   $= I + Bt + \frac{1}{2}(2B) t^2 + \frac{1}{3!}\left(2^2 B\right) t^3 + \frac{1}{4!}\left(2^3 B\right) t^4 + \cdots$

   $= I + \frac{1}{2} B \left(2t + \frac{1}{2}(2t)^2 + \frac{1}{3!}(2t)^3 + \frac{1}{4!}(2t)^4 + \cdots\right)$

   $= I + \frac{1}{2} B \left(e^{2t} - 1\right)$

4. La forme matricielle du système est : $Y' = BY$

   On peut déduire la solution en utilisant, soit e^{Bt} ou bien les vecteurs propres de B :

   - $Y = e^{Bt} V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - e^{2t} & e^{2t} & -e^{2t} \\ -2e^{2t} & 2e^{2t} + 2 & -2e^{2t} \\ e^{2t} & -e^{2t} & e^{2t} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Soit:

$$Y=\begin{pmatrix} a-\frac{1}{2}ae^{2t}+\frac{1}{2}be^{2t}-\frac{1}{2}ce^{2t} \\ b-ae^{2t}+be^{2t}-ce^{2t} \\ c+\frac{1}{2}ae^{2t}-\frac{1}{2}be^{2t}+\frac{1}{2}ce^{2t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-\frac{1}{2}(a-b+c)e^{2t} \\ b-(a-b+c)e^{2t} \\ c+\frac{1}{2}(a-b+c)e^{2t} \end{pmatrix}$$

- $Y=(C_1V_1+C_2V_2)+C_3V_3e^{2t}$

$$=\left(C_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)+C_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}C_1-C_2-C_3e^{2t}\\ C_1-2C_3e^{2t}\\ C_2+C_3e^{2t}\end{pmatrix}$$

Exercice 5 *On considère la fonction* $2-$*périodique, et paire, définie sur* $[0,1]$ *par:* $f(t)=1-t$

1. Tracer le graphe de $f(t)$ sur $[-5,5]$.
2. Calculer la série réelle de Fourier associée à $f(t)$.
3. Déduire la série de Fourier associée à la fonction $2-$périodique

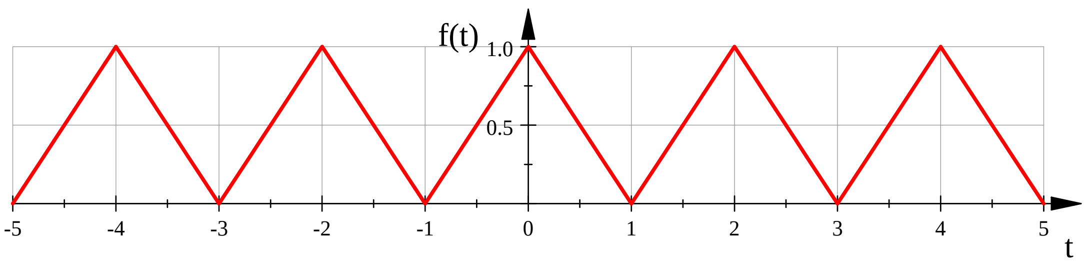
$$g(t)=\begin{cases} 1 & si \quad -1\leq t\leq 0 \\ -1 & si \quad 0\leq t\leq 1\end{cases}$$

   Tracer le graphe de $g(t)$ sur $[-5,5]$

4. Déduire les sommes : $S_1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $S_2=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}$

Solution 5 *:*

1. Graphe:



2. $f(t)$ est paire donc $b_n=0\ \forall n\geq 1$, et $T=2\Longrightarrow\omega=\pi$

$$a_0=\frac{1}{2}\left(2\int_0^1(-t+1)\,dt\right)=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{2}\left(2\int_0^1(-t+1)\cos(n\pi t)\,dt\right)=2\int_0^1(-t+1)\cos(n\pi t)\,dt$$

Par parties: $\begin{cases} u=-t+1 & \Longrightarrow & du=-dt \\ \cos n\pi t dt=dv & \Longrightarrow & v=\dfrac{\sin n\pi t}{n\pi}\end{cases}$

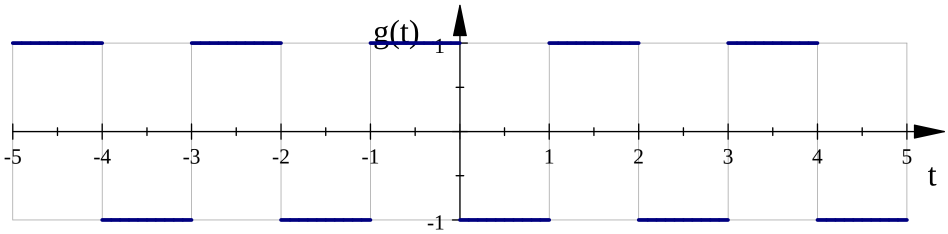
$$a_n = 2\left(\left(-t+1\right)\underbrace{\frac{\sin n\pi t}{n\pi}}_{=0}\right)_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi t dt$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi t\Big|_0^1 = -\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right) = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi^2 n^2}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi^2 n^2} = \dfrac{4}{\pi^2\left(2k+1\right)^2} & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

$$S\left(t\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos\left(2k+1\right)\pi t}{\left(2k+1\right)^2}\right)$$

3. Graphe:



$g\left(t\right)$ est la dérivée de $f\left(t\right)$, donc sa série de Fourier est $S'\left(t\right) = \dfrac{dS}{dt}$

$$S'\left(t\right) = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(2k+1\right)\pi t}{2k+1}$$

4. $f\left(t\right)$ est continue au point $t = 0 \Longrightarrow$

$f\left(0\right) = 1 = S\left(0\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{\pi^2}S_1$

d'où: $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

on a $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \left(-1\right)^k$

$\sin\left(2k+1\right)\pi t = \left(-1\right)^k$ si $t = \frac{1}{2}$

$g\left(1/2\right) = -1 = S'\left(1/2\right) = -\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(2k+1\right)\pi/2}{2k+1} = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{2k+1}$

Finalement : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

3eme exercice Statistique:

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -A$

   $A^3 = A^2 A = -A^2 = A$

   On démontre par réccurence que $A^n = (-1)^n A$

2. $C = A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $\det(C) = -2 \neq 0$ donc C est inversible.

3. $P(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 1 \\ 4 & -2-x & 2 \\ -2 & 1 & -1-x \end{vmatrix}$

   $\left| \begin{matrix} 2-x & -1 & 1 \\ 4 & -2-x & 2 \\ -2 & 1 & -1-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2-x & -1 \\ 4 & -2-x \\ -2 & 1 \end{matrix}$

   $= (2-x)(2+x)(1+x) + 4 + 4 - 2(2+x) - 2(2-x) - 4(1+x)$

   $= (2-x)(2+x)(1+x) + 8 - 12 - 4x = (2-x)(2+x)(1+x) - 4 - 4x$

   $= (2-x)(2+x)(1+x) - 4(1+x)$

   $= (1+x)\left(4 - x^2 - 4\right) = -x^2(1+x)$

4. $Q(\lambda) = |C - \lambda I| = |A - I - \lambda I| = |A - (\lambda+1)I| = P(\lambda+1)$

   $Q(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$

   $C = A - I \Longrightarrow C^2 = A^2 + I^2 - 2AI = -A + I - 2A = I - 3A$

   $C^3 = CC^2 = (A-I)(I-3A) = -3A^2 + 4AI - I^2 = 3A + 4A - I = 7A - I$

   $Q(C) = -C^3 - 4C^2 - 5C - 2I = -(7A - I) - 4(I - 3A) - 5(A - I) - 2I = O$

5. $Q(C) = -C^3 - 4C^2 - 5C - 2I = O$

   $Q(C) \times C^{-1} = -C^2 - 4C - 5I - 2C^{-1} = O$

   $C^{-1} = -\frac{1}{2}\left(C^2 + 4C + 5I\right) = -\frac{1}{2}(I - 3A + 4A - 4I + 5I)$

   $= -\frac{1}{2}(A + 2I) = -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Expression matricielle du système : $CX = M$ avec

   $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix}$

   la solution est: $X = C^{-1}M = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $x = 1 \qquad y = -2 \qquad z = 2$