Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Partiel Semestre II 2011-2012

Mardi 8 Mai 2012 13h:00→15h:00

Solutions

Exercice 1 (Obligatoire) *Dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *on définit l'endomorphisme:*

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = (3a-b+c, 4a-b+2c, -2a+b)$$

relativement à la base canonique : $\mathbb{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$
2. Calculer $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. Calculer $(f \circ f)(a,b,c)$ en déduire $f \circ f \circ \cdots \circ f \quad n$ fois
4. f est-il inversible? Justifier votre réponse.
5. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions.
6. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f.
7. Déduire que A est diagonalisable, donner la matrice diagonale D semblable à A, calculer D^n $(\forall n \in \mathbb{N})$ et retrouver A^n.
8. Calculer la matrice $\exp(At)$.
9. Soient $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ des fonctions de la variable réelle t vérifiants le système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

   Déduire la solution générale du système (S) :

   (a) En utilisant la matrice $\exp(At)$.
   (b) A l'aide de valeurs propres et les vecteurs propres

10. Soit la matrice: $B = A - I$, sans faire de calcul matriciel :

   (a) Calculer B^n $\forall n \in \mathbb{N}$
   (b) Montrer que $AB = BA = O$, où O est matrice nulle.
   (c) Déterminer $Q(\lambda)$: le Polynôme caractéristique de B.Vérifier que $Q(B) = O$.
   (d) Calculer $\exp(Bt)$

Solution 1 (60 points) $f(a,b,c) = (3a - b + c, 4a - b + 2c, -2a + b)$

1. $f(e_1) = f(1,0,0) = (3,4,-1)$ $\qquad f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,-1,1)$
   $f(e_3) = f(0,0,1) = (1,2,0)$
   $\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{3 points}}$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ $\boxed{\text{3 points}}$
   A est une matrice idempotente donc $A^n = A \; \forall n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\text{2 points}}$

3. $(f \circ f)\, v = A^2 v = Av \Longrightarrow f \circ f = f$ Par suite $f \circ f \circ \cdots \circ f = f$ $\boxed{\text{3 points}}$

4. On a $A = M(f, \mathbb{E})$, f est inversible si A est inversible
   $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible, par suite f est non inversible. $\boxed{\text{2 points}}$

5. Image et noyau de f

   - $\ker f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \diagup f(a,b,c) = (0,0,0)\right\}$
     si $(a,b,c) \in \ker f \Longrightarrow f(a,b,c) = (3a - b + c, 4a - b + 2c, -2a + b) = (0,0,0)$
     $\Longrightarrow \begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ 4a - b + 2c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ La solution du système est: $\begin{cases} b = 2a \\ c = -a \end{cases}$
     d'où: $\ker f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \diagup (a,b,c) = (a, 2a, -a) = a(1,2,-1)\right\}$ $\boxed{\text{3 points}}$
     $\dim(\ker f) = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$
   - $\mathrm{Im}(f) = \left\{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \diagup (X,Y,Z) = f(a,b,c)\right\}$
     on remarque que $Z = -2X + Y$
     $\Longrightarrow (X,Y,Z) = (X, Y, -2X + Y) = (X, 0, -2X) + (0, Y, Y)$
     $= X(1,0,-2) + Y(0,1,1)$ $\boxed{\text{3 points}}$
     $\{(1,0,-2), (0,1,1)\}$ constitue une base de $\mathrm{Im}\, f$
     $\Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ $\boxed{\text{2 points}}$

     Ou bien:
     $f(a,b,c) = af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3)$
     $f(e_1) = (3,4,-2)$, $\qquad f(e_2) = (-1,-1,1)$, $\qquad f(e_3) = (1,2,0)$
     Or : $f(e_1) + 2f(e_2) = f(e_3)$ donc:
     $(X,Y,Z) = f(a,b,c) = af(e_1) + bf(e_2) + c(f(e_1) + 2f(e_2))$
     $\qquad = (a+c)\, f(e_1) + (b + 2c)\, f(e_2) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2)$

6. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

   $= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$
   $= -\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = -\lambda(\lambda - 1)^2$ $\boxed{\text{3 points}}$

Les valeurs propres sont telles que $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

Les vecteurs propres sont tels que : $AV = \lambda V$ $\boxed{\text{3 points =1+1+1}}$

- $\lambda_1 = 0 \longleftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0 \\ 4\alpha_1 - \beta_1 + 2\gamma_1 = 0 \\ \beta_1 - 2\alpha_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 \\ \gamma_1 = -\alpha_1 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ soit } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1 \longleftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$:

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_2 - \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_2 \\ 4\alpha_2 - \beta_2 + 2\gamma_2 = \beta_2 \\ \beta_2 - 2\alpha_2 = \gamma_2 \end{cases} \Longrightarrow \beta_2 - 2\alpha_2 = \gamma_2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \beta_2 - 2\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. A admet trois vecteurs propres dont la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,telle que : $A = PDP^{-1}$

   On a $D^n = D\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc $A^n = PD^nP^{-1} = PDP^{-1} = A$ $\boxed{\text{3 points}}$

8. $$\begin{aligned} \exp(At) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n \\ &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \\ &= I + A\left(t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots\right) \\ &= I + A\left(e^t - 1\right) \quad \boxed{\text{3 points}} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(e^t - 1\right) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^t - 2 & 1 - e^t & e^t - 1 \\ 4e^t - 4 & 2 - e^t & 2e^t - 2 \\ 2 - 2e^t & e^t - 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

9. Le système différentiel: s'écrit: $Y' = AY$

(a) $Y = e^{At}C = \begin{pmatrix} 3e^t - 2 & 1 - e^t & e^t - 1 \\ 4e^t - 4 & 2 - e^t & 2e^t - 2 \\ 2 - 2e^t & e^t - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$= \begin{pmatrix} C_1 \left(3e^t - 2\right) - C_2 \left(e^t - 1\right) + C_3 \left(e^t - 1\right) \\ C_3 \left(2e^t - 2\right) + C_1 \left(4e^t - 4\right) - C_2 \left(e^t - 2\right) \\ C_3 - C_1 \left(2e^t - 2\right) + C_2 \left(e^t - 1\right) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x(t) = -2C_1 + C_2 - C_3 + (3C_1 - C_2 + C_3) e^t \\ y(t) = -4C_1 + 2C_2 - 2C_3 + (4C_1 - C_2 + 2C_3) e^t \\ z(t) = 2C_1 - C_2 + C_3 - (2C_1 - C_2) e^t \end{pmatrix}$

Soit

$$\begin{cases} x(t) = A + Be^t \\ y(t) = 2A + Ce^t \\ z(t) = -A + (C - 2B) e^t \end{cases} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

(b) $Y = \sum_{i=1}^{3} C_i V_i \exp(\lambda_i t)$

$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t$ $\boxed{\text{3 points}}$

Soit

$$\begin{array}{c} x = C_1 + C_2 e^t \\ y = 2C_1 + C_3 e^t \\ z = -C_1 + (C_3 - 2C_2) e^t \end{array} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

10. $B = A - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

(a) $B^2 = (A - I)^2 = A^2 + I^2 - 2AI = A + I - 2A = -A + I = -B$

$B^3 = B^2 B = -BB = -B^2 = B$

on démontre par réccurence : $B^n = -(-1)^n B$ $\boxed{\text{3 points}}$

(b) $\begin{cases} AB = A(A - I) = A^2 - AI = A - A = O \\ BA = (A - I) A = A^2 - IA = A - A = O \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

(c) $Q(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(A - I - \lambda I)$

$= \det(A - (\lambda + 1) I) = P(\lambda + 1)$

$= -(\lambda + 1)(\lambda + 1 - 1)^2 = -\lambda^2 (\lambda + 1) = -\left(\lambda^3 + \lambda^2\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$Q(B) = -\left(B^3 + B^2\right) = -(B - B) = O$ $\boxed{\text{1 point}}$

(d) $\exp(Bt) = \exp(A - I) t = \exp(At) \exp(-It)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Or I est une matrice diagonale donc $\exp(-It) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = Ie^{-t}$ $\boxed{\text{1 point}}$

d'où:

$\exp(Bt) = \exp(At) Ie^{-t} = \exp(At) e^{-t}$ d'où :

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-t} & e^{-t} - 1 & 1 - e^{-t} \\ 4 - 4e^{-t} & 2e^{-t} - 1 & 2 - 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

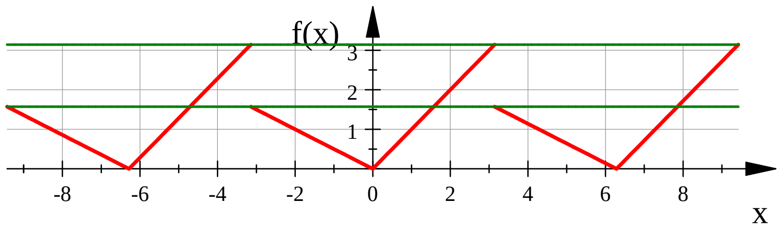
Exercice 2 (choix 1) *Soit la fonction $2\pi-$périodique définie par:*

$$f(x)=\begin{cases} x & si \quad 0\leq x<\pi \\ -\dfrac{x}{2} & si \quad -\pi<x\leq 0\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f(x)$ sur $]-3\pi,3\pi[$
2. Calculer les coefficents complexes de Fourier associés à $f(x)$
3. En déduire la série réelle de Fourier associée à $f(x)$
4. Déduire la somme
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Solution 2 *:*

1. Graphe : $\boxed{\text{5 points}}$



2. $C_n=\dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{0}x\exp(-jnx)\,dx+\int_{0}^{\pi}x\exp(-jnx)\,dx\right)$

$$\int x\exp(-jnx)\,dx=\frac{j}{n}xe^{-jnx}-\int\frac{j}{n}e^{-jnx}\,dx=\left(\frac{jx}{n}+\frac{1}{n^2}\right)e^{-jnx}$$

$$\Longrightarrow\int_{-\pi}^{0}x\exp(-jnx)\,dx=\left(\frac{jx}{n}+\frac{1}{n^2}\right)e^{-jnx}\Big|_{-\pi}^{0}\quad\boxed{\text{5 points}}$$

$$=\frac{1}{n^2}-\left(-\frac{j\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\right)e^{jn\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n^2}+j\frac{\pi}{n}\ \boxed{\text{5 points}}$$

$$\int_{0}^{\pi}x\exp(-jnx)\,dx=\left(\frac{jx}{n}+\frac{1}{n^2}\right)e^{-jnx}\Big|_{0}^{\pi}\quad\boxed{\text{5 points}}$$

$$=\left(\frac{j\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\right)e^{-jn\pi}-\frac{1}{n^2}=\frac{(-1)^n-1}{n^2}+j\frac{\pi(-1)^n}{n}\quad\boxed{\text{5 points}}$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}+j\frac{\pi(-1)^n}{n}\right)+\frac{(-1)^n-1}{n^2}+j\pi\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$=\frac{3\left((-1)^n-1\right)}{4\pi n^2}+j\frac{(-1)^n}{4n}\quad\boxed{\text{5 points}}$$

3. On a $C_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}\Longrightarrow$

$$a_n=\frac{3}{2\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\frac{-3}{\pi(2k+1)^2}\quad\boxed{\text{4 points=2+2}}$$
$$b_n=-\frac{(-1)^n}{2n}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{3\pi}{8} \boxed{\text{2 points}}$$

$$S(x) = \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n} \boxed{\text{4 points}}$$

4. $f(x)$ est continue au point $x = 0$ donc $f(0) = 0 = S(0)$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 3 (choix 2) *On considère la matrice:*

$$A(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & -x & -x & -x \\ x & x & -x & x \\ x & x & x & -x \\ x & -x & x & x \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de x la matrice $A(x)$ est inversible.
2. On pose $A = A(1)$ Calculer A^2
3. Exprimer A^2 en fonction de A et I
4. Déduire A^3 et A^4
5. Déterminer $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A
6. Vérifier que $P(A) = O$
7. Calculer la matrice inverse A^{-1}.
8. Montrer que A est une matrice orthogonale
9. Résoudre la système linéaire:

$$\begin{cases} a - b - c - d = -4 \\ a + b - c + d = -2 \\ a + b + c - d = -6 \\ a - b + c + d = 8 \end{cases}$$

Solution 3 *:*

1. $A(x)$ est inversible si $\det A(x) \neq 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\det A(x) = \frac{x^4}{16}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x^4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \mapsto L_4 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \mapsto L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 16$$

$\det A\left(x\right) = x^4$ $\boxed{\text{4 points}}$

2. $$A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

3. $A^2 = A - I$ $\boxed{\text{3 points}}$

4. $A^3 = A^2 A = \left(A - I\right) A = A^2 - IA = A - I - A = -I$
   $A^4 = A^3 A = -IA = -A$ $\boxed{\text{3 points}}$

5. $P\left(\lambda\right) = \det\left(A - \lambda I\right) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1$ $\boxed{\text{5 points}}$

6. $P\left(A\right) = A^4 - 2A^3 + 3A^2 - 2A + I = -A - 2\left(-I\right) + 3\left(A - I\right) - 2A + I = O$ $\boxed{\text{2 points}}$

7. $P\left(A\right) \times A^{-1} = A^3 - 2A^2 + 3A - 2I + A^{-1} = O$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $A^{-1} = -\left(A^3 - 2A^2 + 3A - 2I\right) = -\left(-I - 2\left(A - I\right) + 3A - 2I\right) = I - A = -A^2$

8. On a ${}^tA = A^{-1}$ donc A est une matrice orthogonale $\boxed{\text{2 points}}$

9. La forme matricielle du système est : $BX = V$

   $$\text{Avec } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

   La solution est : $X = B^{-1}V = \frac{1}{2}A^{-1}V$ $\boxed{\text{1 point1}}$

   $$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   $a = -1, \qquad b = -3, \qquad c = 2, \qquad d = 4$ $\boxed{\text{3 points}}$