Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen de rattrapage 2011-2012 **Durée : 3h.**

Exercice 1 (20 points) *On considère les champs scalaires :*

$$f(x,y,z,t) = Ae^{j(\omega t - ax - by - cz)} \quad et \quad g(x,y,z,t) = \sin n\pi (x+y+z) \cos n\pi\omega t$$

où A, ω, a, b, c *et* n *sont des constantes données,* x, y, z, t *sont des variables réelles.*
On pose $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ *et* $v = \dfrac{\omega}{k}$*, Montrer que :*

$$\begin{aligned} \Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta g - \frac{3}{\omega^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Solution 1 $f(x,y,z,t) = Ae^{j(\omega t - ax - by - cz)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A\exp(j(\omega t - ax - by - cz))) = -jaA\exp(j(\omega t - ax - by - cz)) = -jaf$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-jaf) = -ja\frac{\partial f}{\partial x} = (-ja)^2 f = -a^2 f$$

de même on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -b^2 f \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -c^2 f$$

donc $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\left(a^2+b^2+c^2\right) f = -k^2 f$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$$

On a $f = -\dfrac{1}{k^2}\Delta f = -\dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Longrightarrow \Delta f = \dfrac{k^2}{\omega^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ d'où finalement :

$$\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$g(x,y,z,t) = \sin n\pi (x+y+z) \cos n\pi\omega t$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\sin n\pi (x+y+z)\cos n\pi\omega t) = -\pi^2\omega^2 n^2 \sin n\pi (x+y+z) \cos n\pi\omega t = -\pi^2 n^2 \omega^2 g$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin n\pi (x+y+z)\cos n\pi\omega t) = -\pi^2 n^2 \sin n\pi (x+y+z) \cos n\pi\omega t = -\pi^2 n^2 g$$

alors : $\Delta g = -3\pi^2 n^2 g$

Reamrquons que : $-\pi^2 n^2 g = \dfrac{\Delta g}{3} = \dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ donc :

$$\Delta g - \frac{3}{\omega^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

Exercice 2 (25 points) *Soit la fonction causale:*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & si \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & si \quad x \ge 2 \end{cases} \tag{1}$$

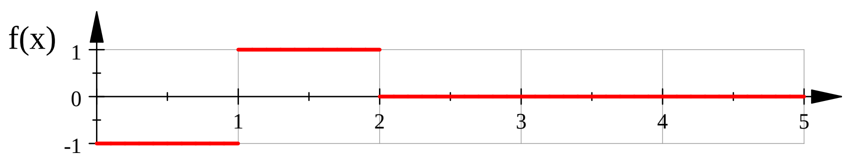
1. Tracer le graphe de $f(x)$.
2. Exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction échelon unité.
3. Calculer la transformée de Laplace de $f(x)$.
4. Soit $H_\lambda(p) = \dfrac{e^{-\lambda p}}{p^3 - 2p^2 + 5p}$ la transformée de Laplace de la fonction $h_\lambda(x)$. Déterminer la fonction $h_0(x)$, et déduire $h_1(x)$ et $h_2(x)$.
5. Déduire la solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = f(x) \tag{2}$$

Vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Solution 2 *:*

1. Graphe: $\boxed{\text{2 points}}$



2. $f(x) = (-1)(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) = -u_0 + 2u_1 - u_2$ $\boxed{\text{3 points}}$
3. $F(p) = -\dfrac{1}{p} + 2\dfrac{e^{-p}}{p} - \dfrac{e^{-2p}}{p} = -\dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p} = -\dfrac{(e^{-p} - 1)^2}{p}$ $\boxed{\text{5 points}}$
4. $H_0(p) = \dfrac{1}{p^3 - 2p^2 + 5p} = \dfrac{1}{p(p^2 - 2p + 5)} = \dfrac{1}{5p} - \dfrac{1}{5}\dfrac{p-2}{p^2 - 2p + 5}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p-2}{p^2 - 2p + 4 + 1}\right) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p-2}{(p-1)^2 + 4}\right)$

$= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(p-1)^2 + 4}\right)$ $\boxed{\text{5 points}}$

$= \dfrac{1}{5}\mathcal{L}\left(1 - e^x \cos 2x + \dfrac{1}{2} e^x \sin 2x\right)$

$$h_0(x) = \frac{1}{5}\left(1 - e^x \cos 2x + \frac{1}{2} e^x \sin 2x\right) u(x)$$

$h_\alpha(x) = h_0(x - \alpha)$

5. Equation image: $\mathcal{L}(y'' - 2y' + 5y) = F(p)$

$\Longrightarrow (p^2 - 2p + 5)\, Y = -\dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$\Longrightarrow Y = -\dfrac{e^{-2p} - 2e^{-p} + 1}{p(p^2 - 2p + 5)} = -H_2(p) + 2H_1(p) - H_0(p)$

$y(x) = -h_2(x) + 2h_1(x) - h_0(x)$ $\boxed{\text{5 points}}$

Exercice 3 (25 points) *Soit (S) la surface fermée constituée par la demi-sphère: $r = R$, $z \geq 0$, y inclus le disque $x^2 + y^2 = R^2$, orientée dans le sens positif. Soit les champs vectoriels: $\overrightarrow{H} = (y-z)\overrightarrow{i} + (z-x)\overrightarrow{j} + (x-y)\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{H} + 2\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}$, avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ le rayon vecteur en un point $M(x,y,z) \in (S)$. et $r = |\overrightarrow{r}|$.*

1. Calculer : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V}$.
2. Montrer, par deux méthodes différentes que le flux de $\overrightarrow{H}$ à travers (S) est nul.
3. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers (S).
4. Si (S) est chargée avec une densité surfacique : $\sigma(x,y,z) = |xyz|$. Calculer la charge totale de (S).

Solution 3 *:*

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -2\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$

   $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} + 2\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}\right) = \frac{2}{r^2} + 2\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\nabla}\left(r^{-2}\right) = \frac{2}{r^2} + 2\overrightarrow{r} \cdot \left(-2r^{-4}\overrightarrow{r}\right) = -\frac{2}{r^2}$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} + 2\overrightarrow{\nabla} \times \left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}\right) = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} + 2\overrightarrow{\nabla}\left(r^{-2}\right) \times \overrightarrow{r} + \frac{1}{r^2}\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r}$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\nabla}\left(r^{-2}\right) \times \overrightarrow{r} = \left(-2r^{-4}\overrightarrow{r}\right) \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$

   $\Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$

2. $\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{r}}{R}$

   $$\Phi = \iint_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \iiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}\, dv$$

   - $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0 \Longrightarrow \Phi = 0$
   - $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{1}{R}\left(x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)\right) = 0 \Longrightarrow \Phi = 0$

3. $$\Phi_1 = \iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$$

   $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} = \left(\overrightarrow{H} + 2\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{R} = 2\frac{r^2}{r^2 R} = \frac{2}{R}$ (sur $(S) : r = R$)

   $$\Phi_1 = \frac{2}{R}\iint_S ds = \frac{2}{R}\left(4\pi R^2\right) = 8\pi R.$$

4. $$Q = \iint_S \sigma ds = \iint_S |xyz|\, ds = 4\iint_S xyz ds \quad \text{pour } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \qquad \text{(Sur le disque: } z = 0)$$

   En coordonnées sphériques : $xyz = R^3 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\theta \cos\theta$

   $ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

   $$Q = R^5 \iint_\Sigma \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta \cos\theta d\theta d\varphi = R^5 \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta \cos\theta d\theta\right) d\varphi = \frac{1}{8}R^5$$

Traiter au choix <u>UN</u> exercice parmi les 2 suivants: $(30 points)$

Exercice 4 *Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on définit l'endomorphisme:*

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = (-5a+3b-3c, -2a-2c, 3a-3b+c)$$

relativement à la base canonique : $\mathbb{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$
2. Calculer $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. Calculer la matrice $\exp(At)$.
4. Déduire la solution générale du système diffèrentiel (S) :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x+3y-3z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x-2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x-3y+z \end{cases} \tag{S}$$

où $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ des fonctions de la variable réelle t.

Solution 4 *:*

1. $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} = -2A$

   $A^3 = (-2A)(A) = -2A^2 = (-2)^2 A$

   $\Longrightarrow A^n = (-2)^{n-1} A, \forall n \geq 1.$

3. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-2)^{n-1} A t^n = I - \frac{1}{2} A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-2)^n t^n$

   $= I - \frac{1}{2} A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-2t)^n = I - \frac{1}{2} A \left(e^{-2t} - 1\right)$

   $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \left(e^{-2t} - 1\right)$

   $= \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} & \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2} \\ e^{-2t} - 1 & 1 & e^{-2t} - 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} & \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$

4. $Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2} & \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} & \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2} \\ e^{-2t} - 1 & 1 & e^{-2t} - 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} & \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A\left(\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}\right)-B\left(\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}\right)+C\left(\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}\right) \\ B+A\left(e^{-2t}-1\right)+C\left(e^{-2t}-1\right) \\ B\left(\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}\right)-A\left(\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}\right)-C\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{3}{2}(A-B+C)+\frac{1}{2}(5A-3B+3C)e^{-2t} \\ y(t) = B-A-C+(A+C)e^{-2t} \\ z(t) = \frac{3}{2}(A-B+C)-\frac{1}{2}(3A-3B+C)e^{-2t} \end{cases}$$

Exercice 5 *On considère la fonction $2\pi-$périodique, et impaire, définie sur $[0,\pi]$ par:*

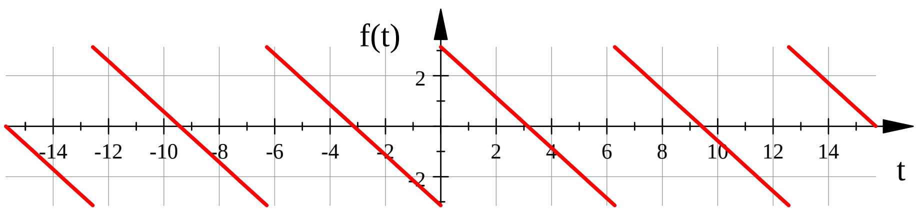
$$f(t) = -t+\pi$$

1. Tracer le graphe de $f(t)$ sur $[-5\pi, 5\pi]$.
2. Calculer la série réelle de Fourier associée à $f(t)$.
3. Calculer l'énergie de $f(t)$.
4. Déduire les sommes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Solution 5 *:*

1. graphe de $f(t)$:



2. fonction impaire $\Longrightarrow a_n = a_0 = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin nt dt = \frac{2}{n}$$

$$S(t) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n}$$

3. $E = 2\int_0^{\pi}(\pi-t)^2 dt = \frac{2}{3}\pi^3$

4. Pour $t = \frac{\pi}{2} : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow -\frac{\pi}{2}+\pi = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\pi/2}{n}$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$E = \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$