Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Final Semestre II 2012-2013

Mardi 9 juillet 2013 11h :00→14h :00

Documents autorisés : Notes de Cours de N.ASSAAD

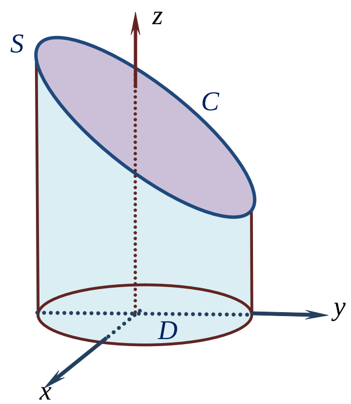
Cahiers, exercices résolus, sessions, téléphones : strictement interdits

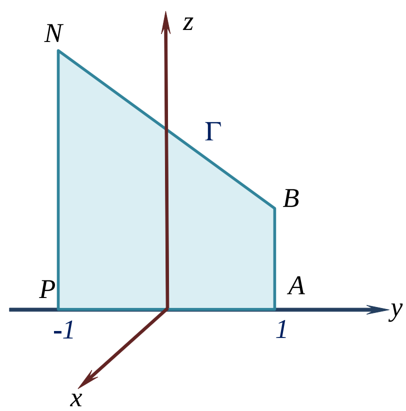
Sujet coordonné par : N. ASSAAD

Proposé pour les centres de : Beyrouth, Bickfaya, Tripoli, Nahr Ibrahim

---

Exercice 1 (45 points) Dans l'espace muni du repère orthonormé $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, On défnit la surface cylindrique fermée S limitée par le plan xOy,et le plan $y+z=a$, $a>1$, la base du cylindre est $x^2+y^2=1$.





Soit (D) la projection de (S) sur le plan xoy, et (C) le contour de (S). On désigne par Γ la courbe frontière de la projection de (S) sur le plan yOz.

On définit sur (S) le champs de vecteurs $\left(\forall M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$:

$$\overrightarrow{H}(M) = xz^2\overrightarrow{i} + yx^2\overrightarrow{j} + y^2z\overrightarrow{k}$$

1. Calculer : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$
2. Calculer le flux de $\overrightarrow{H}$ à travers la surface (S) orientée dans le sens positif.
   (a) à l'aide d'une intégrale de surface
   (b) à l'aide d'une intégrale triple, en justifiant la possibilité de calcul.
3. Calculer le travail effectué par $\overrightarrow{H}$ sur (C).
4. Montrer que le volume du solide limité par la surface fermée (S) se détermine à l'aide de formule :

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{dS}$$

   Calculer V, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$
5. Vérifier la formule de Green-Riemann, en calculant le travail de $\overrightarrow{H}$ sur (Γ)

Solution 1 :

1. $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=\dfrac{\partial\left(xz^2\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(yx^2\right)}{\partial y}+\dfrac{\partial\left(y^2z\right)}{\partial z}=z^2+x^2+y^2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz^2 & x^2y & y^2z\end{vmatrix}=2\left(yz\,\overrightarrow{i}+xz\,\overrightarrow{j}+xy\,\overrightarrow{k}\right)\ \boxed{\text{2 points}}$$

2. $\phi=\displaystyle\iint_S\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS}$

$S=S_1\cup S_2\cup D$

S_1 : le disque intersection du cylindre et le plan $y+z=a$

S_2 : la portion du cylindre

(a) Calcul direct

$$\phi=\iint_{S_1}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS}+\iint_{S_2}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS}+\iint_{D}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS}$$

– S_1est une portion du plan $y+z=a$ donc la normale unitaire sur S_1 est celle sur le plan : $\overrightarrow{n_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(yx^2+y^2z\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(yx^2+y^2\left(a-y\right)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-y^3+ay^2+x^2y\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

en projetant sur le plan xOy : $dS=\dfrac{dxdy}{|\gamma|}=\sqrt{2}dxdy$

$d\phi_1=\left(-y^3+ay^2+x^2y\right)dxdy$

$$\phi_1=\iint_D\left(-y^3+ay^2+x^2y\right)dxdy$$

en coordonnées polaires : $x=r\cos\theta$ $\quad y=r\sin\theta$ $\quad dxdy=rdrd\theta$

$\theta\in[0,2\pi]$ et $r\in[0,1]$

$$\phi_1=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(-r^3\sin^3\theta+ar^2\sin^2\theta+r^3\cos^2\theta\sin\theta\right)rdr\right)d\theta\ \boxed{\text{2 points}}$$

$=\dfrac{\pi}{4}a$ $\boxed{\text{1 point}}$

– Sur S_2 on passe vers les coordonnées cylindriques $(r=1,\theta,z)$:

$x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=z$

avec $\theta\in[0,2\pi]$ et $0\leq z\leq a-y=a-\sin\theta$

la normale unitaire est $\overrightarrow{n_2}=\cos\theta\,\overrightarrow{i}+\sin\theta\,\overrightarrow{j}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n_2}=xz^2\cos\theta+yx^2\sin\theta=z^2\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta$ $\boxed{\text{1 point}}$

$dS=rd\theta dz=d\theta dz$

$$\phi_2=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a-\sin\theta}\left(z^2\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta\right)dz\right)d\theta\ \boxed{\text{1 point}}$$

$=\dfrac{1}{3}\pi a^3+\dfrac{1}{2}\pi a=\dfrac{1}{6}\pi a\left(2a^2+3\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

– Sur D : $\overrightarrow{n_3}=-\overrightarrow{k}$ et $z=0$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n_1}=-y^2z=0\Longrightarrow\phi_3=0$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \frac{\pi}{4}a + \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{1}{2}\pi a = \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{3}{4}\pi a \ \boxed{\text{1 point}}$$

(b) Le champ $\overrightarrow{H}$ est continu sur (S) et dans le volume (V) limité par (S) ainsi les dérivées partielles des composantes $\boxed{\text{1 point}}$

Formule d'Ostrogradsky : $\phi = \iint\limits_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint\limits_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} dV$

$$\Longrightarrow \phi = \iiint\limits_V \left(z^2 + x^2 + y^2\right) dxdydz \boxed{\text{1 point}}$$

Coordonnées cylindriques : $x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$

avec : $0 \leq r \leq 1 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq z \leq a - y = a - r\sin\theta$ $\boxed{\text{2 points}}$

$dxdydz = rdrd\theta dz$

$$\phi = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a - r\sin\theta} \left(z^2 r + r^3\right) dz \right) d\theta \right) dr \ \boxed{\text{1 point}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{3}{4}\pi a \ \boxed{\text{1 point}}$$

3. Formule de Stokes : $\oint\limits_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_{S1} \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS}$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = 2\left(yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}\right) \boxed{\text{2 points}}$$

Sur (S_1) :

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}(xz + xy) = \frac{2}{\sqrt{2}}(x(a - y) + xy) = \sqrt{2}ax \boxed{\text{2 points}}$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_{S1} \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS} = 2a \iint\limits_D xdxdy = 2a \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta d\theta \right) dr = 0 \boxed{\text{2 points}}$$

4. Formule d'Ostrogradsky : $\iint\limits_S \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint\limits_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r} dV = 3V \Longrightarrow V = \frac{1}{3} \iint\limits_S \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{dS}$ $\boxed{\text{2 points}}$

– $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z) = \frac{a}{\sqrt{2}} \boxed{\text{1 point}}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_1} dS = adxdy \boxed{\text{1 point}}$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (a)\, rdr \right) d\theta = \pi a \boxed{\text{1 point}}$$

– $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_2} = x\cos\theta + y\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \boxed{\text{1 point}}$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a - \sin\theta} dz \right) d\theta = 2\pi a \boxed{\text{1 point}}$$

– $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_3} = -z = 0$ sur $D \Longrightarrow I_3 = 0 \boxed{\text{1 point}}$

$$I = \frac{1}{3}(\pi a + 2\pi a) = \pi a$$

En effet par intégrale triple ; $V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a - r\sin\theta} rdz \right) d\theta \right) dr = \pi a$

5. $W_\Gamma\left(\overrightarrow{H}\right)=\oint\limits_\Gamma \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}$

(a) A l'aide d'une intégrale curviligne :

$$W_\Gamma=\int\limits_{PA}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}+\int\limits_{AB}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}+\int\limits_{BN}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}+\int\limits_{NP}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}$$

$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}=xz^2dx+yx^2dy+y^2zdz$ or sur $\Gamma : x=dx=0\Longrightarrow \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}=y^2zdz$

- Sur le segment : $PA : z=dz=0\Longrightarrow \int\limits_{PA}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}=0$ $\boxed{\text{1 point}}$
- Sur le segment $AB : y=1$ et z varie de $z_A=0$ à $z_B=a-1$

  $$\int\limits_{AB}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}=\int\limits_0^{a-1}zdz=\frac{1}{2}(a-1)^2\boxed{\text{2 points}}$$
- Sur le segment $BN : y=a-z\Longrightarrow \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}=(a-z)^2zdz$, et z varie de $z_B=a-1$ à $z_N=a+1$

  $$\int\limits_{BN}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}=\int\limits_{a-1}^{a+1}\left(a^2z-2az^2+z^3\right)dz=\frac{2}{3}a\boxed{\text{2 points}}$$
- Sur le segment $NP : y=-1$, z varie de $z_N=a+1$ à $z_P=0$

  $$\int\limits_{NP}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}=\int\limits_{a+1}^{0}zdz=-\frac{1}{2}(a+1)^2\boxed{\text{2 points}}$$

  $$W_\Gamma=\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}(a+1)^2=-\frac{4}{3}a$$

(b) Formule de Green-Riemann : $W_\Gamma=\iint\limits_{D_\Gamma}\left(\frac{\partial\left(y^2z\right)}{\partial y}\right)dydz=\iint\limits_{D_\Gamma}(2yz)\,dydz$

où sur $D_\Gamma : -1\le y\le 1$ et $0\le z\le a-y$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$W_\Gamma=2\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_0^{a-y}zydz\right)dy=-\frac{4}{3}a\boxed{\text{2 points}}$$

Exercice 2 (25 points) On considère la forme différentielle :

$$\omega=(xdx+ydy+zdz)\,e^{-x^2-y^2-z^2}$$

1. Montrer que ω est une différentielle totale.
2. Soit $f(x,y,z)$, la fonction telle que $\omega=df$. Déterminer f sachant que $f(0,0,0)=0$.
3. Calculer le travail effectué par le mouvement d'une particule M dans le champ des forces : $\overrightarrow{F}=\overrightarrow{r}e^{-r^2}$ où $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{OM}$ en traversant la courbe joignant les points O à $A(2,2,2)$.
4. Calculer les travails de $\overrightarrow{F}$ sur chacun des cercles centrés à l'origine et des rayons $R_1=2$ et $R_2=20$.

Solution 2 : Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$

1. $P = xe^{-x^2-y^2-z^2}, Q = ye^{-x^2-y^2-z^2}, R = ze^{-x^2-y^2-z^2}$
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2xye^{-x^2-y^2-z^2}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2xye^{-x^2-y^2-z^2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial z} = -2xze^{-x^2-y^2-z^2}\\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = -2xze^{-x^2-y^2-z^2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial Q}{\partial z} = -2yze^{-x^2-y^2-z^2}\\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = -2yze^{-x^2-y^2-z^2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$
Alors ω est une différentielle totale. c.à.d. $\exists f = f(x,y,z) / \omega = df$. $\boxed{1 \text{ point}}$

2. $\omega = df \Longrightarrow P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$
$\Longrightarrow f = \int xe^{-x^2-y^2-z^2}dx = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + g(y,z)$ $\boxed{3 \text{ points}}$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = ye^{-x^2-y^2-z^2} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = Q = ye^{-x^2-y^2-z^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow g = g(z)$ $\boxed{1 \text{ point}}$
$f(x,y,z) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + g(z)$
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = ze^{-x^2-y^2-z^2} + \dfrac{dg}{dz} = R = ze^{-x^2-y^2-z^2}$
$\Longrightarrow \dfrac{dg}{dz} = 0 \Longrightarrow g = C = Cte$ $\boxed{1 \text{ point}}$
$f(x,y,z) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + C$ $\boxed{1 \text{ point}}$
$f(0,0,0) = -\dfrac{1}{2} + C = 0 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{2}$ $\boxed{1 \text{ point}}$
finalement :
$$f(x,y,z) = -\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2-z^2} + \frac{1}{2} \boxed{1 \text{ point}}$$

3. $dW = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = (xdx + ydy + zdz)e^{-x^2-y^2-z^2} = \omega = df$ $\boxed{2 \text{ points}}$
$W = \displaystyle\int_{OA} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_O^A df = f(A) - f(O)$ $\boxed{2 \text{ points}}$
$= -\dfrac{1}{2}\left(e^{-2^2-2^2-2^2} - 1\right) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}e^{-12}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

4. Dans les deux cas $W = \displaystyle\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$, puisque $\overrightarrow{F}$ est conservatif. $\boxed{5 \text{ points}}$

Exercice 3 (30 points) On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Déduire la matrice $\exp(At)$ où t est réel.
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
4. Déduire la solution du système différentiel:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - 2y + 2z$$
$$\frac{dz}{dt} = -2x + y - z$$

   (a) En utilisant la matrice $\exp(At)$.
   (b) A l'aide des valeurs propres et les vecteurs propres.

Solution 3 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -A \boxed{\text{3 points}}$

   $A^3 = A^2A = -AA = -A^2 = A \qquad A^4 = A^2A^2 = (-A)(-A) = A^2 = -A \boxed{\text{1 points}}$

$$A^n = (-1)^{n+1} A = \begin{cases} -A & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \boxed{\text{2 points}}$$

2. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \boxed{\text{1 point}}$

$$= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots$$
$$= I + At - \frac{1}{2!}At^2 + \frac{1}{3!}At^3 - \frac{1}{4!}At^4 + \cdots$$
$$= I - A\left(-t + \frac{1}{2!}At^2 - \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{4!}At^4 + \cdots\right)$$
$$= I - A\left(-t + \frac{1}{2!}A(-t)^2 + \frac{1}{3!}A(-t)^3 + \frac{1}{4!}A(-t)^4 + \cdots\right) \boxed{\text{2 points}}$$
$$= I - A\left(e^{-t} - 1\right) \boxed{\text{2 points}}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left(e^{-t} - 1\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-t} & e^{-t} - 1 & 1 - e^{-t} \\ 4 - 4e^{-t} & 2e^{-t} - 1 & 2 - 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

3. Equation caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -2-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 \boxed{\text{2 points}}$$

$P(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 1)$

$$P(\lambda) = 0 \to \begin{cases} \lambda = 0 : double \\ \lambda = 1 : simple \end{cases} \boxed{\text{2 points}}$$

Vecteurs propres :
$AV_i = \lambda_i V_i$

$$\lambda = 0 \leftrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

$$\lambda = -1 \leftrightarrow V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$

4. Solution du système différentiel : $\dfrac{dY}{dt} = AY;\ \ Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

(a) En utilisant la matrice $\exp(At)$: $Y = e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$

$$Y = \begin{pmatrix} 3-2e^{-t} & e^{-t}-1 & 1-e^{-t} \\ 4-4e^{-t} & 2e^{-t}-1 & 2-2e^{-t} \\ 2e^{-t}-2 & 1-e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_2\left(e^{-t}-1\right) - C_3\left(e^{-t}-1\right) - C_1\left(2e^{-t}-3\right) \\ C_2\left(2e^{-t}-1\right) - C_3\left(2e^{-t}-2\right) - C_1\left(4e^{-t}-4\right) \\ C_1\left(2e^{-t}-2\right) - C_2\left(e^{-t}-1\right) + C_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = 3C_1 - C_2 + C_3 - (2C_1 - C_2 + C_3)\, e^{-t} \\ y(t) = 4C_1 - C_2 + 2C_3 - (4C_1 - 2C_2 + 2C_3)\, e^{-t} \\ z(t) = -2C_1 + C_2 + (2C_1 - C_2 + C_3)\, e^{-t} \end{cases} \boxed{\text{5 points}}$$

(b) A l'aide des valeurs propres et les vecteurs propres :
$Y(t) = M_1V_1 + M_2V_2 + M_3V_3e^{-t}$

$$= M_1\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + M_3\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}M_1 - \frac{1}{2}M_2 - M_3e^{-t} \\ M_1 - 2M_3e^{-t} \\ M_2 + M_3e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{\text{5 points}}$$