Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen Partiel Semestre II 2012-2013

Vendredi 24 Mai 2013 14h :00→16h :00

Solutions et Barèmes

Exercice 1 (45 points) On définit sur $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme f :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = (2a+2b-c, -a-b+c, a+2b)$$

relativement à la base canonique : $\mathbb{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions.
3. Calculer $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. f est-il inversible ? Justifier votre réponse, déterminer f^{-1}s'il existe.
5. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f.
6. Calculer la matrice $\exp(At)$.
7. Soient $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ des fonctions de la variable réelle t vérifiants le système diffèrentiel :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x+2y-z \\ \frac{dy}{dt} &= -x-y+z \\ \frac{dz}{dt} &= x+2y \end{aligned}\right. \qquad (S)$$

Déterminer la solution du système (S) :

(a) En utilisant la matrice $\exp(At)$.

(b) A l'aide des valeurs propres et les vecteurs propres.

Solution 1 (45 points) $f(a,b,c) = (2a+2b-c, -a-b+c, a+2b)$

1. $\left\{\begin{array}{l} f(e_1) = (2,-1,1) \\ f(e_2) = (2,-1,2) \\ f(e_3) = (-1,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $\ker f = \{v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / f(v) = 0\}$

Si $v = (a,b,c) \in \ker f \Longleftrightarrow f(v) = Av = 0$

$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2a+2b-c=0 \\ -a-b+c=0 \\ a+2b=0 \end{array}\right.$ ce système a une solution unique : $a=b=c=0$

donc : $\ker f = \{(0,0,0)\}$ et $\dim \ker f = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\operatorname{Im} f = \{W = (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 / W = f(v), \forall v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$
Le fait que $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$
$f(v) = f(a,b,c) = af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3)$
On a $rangA = 3$,$\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ $\boxed{\text{3 points}}$

Même $\mathbb{E}$ peut être considérée comme base de $\operatorname{Im} f$.

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 = A^2 A = IA = A$ $\boxed{\text{1 point}}$

   On déduite, par reccurence que : $A^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4. $A = M(f, \mathbb{E})$

   $\det A = -1 \neq 0$ donc A est inversible par suite f est inversible.

   On a $A^2 = I \Longrightarrow A^{-1} = A \Longleftrightarrow f^{-1} = f$. $\boxed{\text{2 points}}$

5. Les valeurs propres de A sont les racines de l'équation caractéristique :

$$F(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$F(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

Les racines sont $\lambda_1 = -1$ simple $\quad \lambda_{2,3} = 1$ double. $\boxed{\text{2 points}}$
Les vecteurs propres de f sont V_i tels que $f(V_i) = AV_i = \lambda_i V_i$
on a donc :

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -1, \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1$ $\boxed{\text{3 points}}$

6. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots$

   $= I + At + \frac{1}{2!}It^2 + \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{4!}It^4 + \cdots$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= I\left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots\right) + A\left(t + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \cdots\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $= I\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + A\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   $= I\cosh t + A\sinh t$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh t + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sinh t$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh t + 2\sinh t & 2\sinh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t - \sinh t & \sinh t \\ \sinh t & 2\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \boxed{2 \text{ points}}$$

7. Soit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

le système s'écrit donc $(S) : \varphi'(t) = A\varphi(t)$ $\boxed{2 \text{ points}}$

(a) $\varphi(t) = \exp(At)\, V$

$$= \begin{pmatrix} \cosh t + 2\sinh t & 2\sinh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t - \sinh t & \sinh t \\ \sinh t & 2\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \boxed{2 \text{ points}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2C_2 \sinh t - C_3 \sinh t + C_1 (\cosh t + 2\sinh t) \\ C_3 \sinh t - C_1 \sinh t + C_2 (\cosh t - \sinh t) \\ C_3 \cosh t + C_1 \sinh t + 2C_2 \sinh t \end{pmatrix} \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} x(t) = C_1 \cosh t + (2C_1 + 2C_2 - C_3) \sinh t \\ y(t) = C_2 \cosh t + (-C_1 - C_2 + C_3) \sinh t \\ z(t) = C_3 \cosh t + (C_1 + 2C_2) \sinh t \end{array} \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(3C_1 + 2C_2 - C_3)\, e^t + \frac{1}{2}(-C_1 - 2C_2 + C_3)\, e^{-t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}(C_1 - C_3)\, e^t - \frac{1}{2}(-C_1 - 2C_2 + C_3)\, e^{-t} \\ z(t) = \frac{1}{2}(C_1 + 2C_2 + C_3)\, e^t + \frac{1}{2}(-C_1 - 2C_2 + C_3)\, e^{-t} \end{cases}$$

(b) $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{3} C_i V_i \exp(\lambda_i t)$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \left(C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t$$

$$= \begin{pmatrix} (C_3 - 2C_2)\, e^t + C_1 e^{-t} \\ C_2 e^t - C_1 e^{-t} \\ C_3 e^t + C_1 e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\begin{cases} x(t) = (C_3 - 2C_2)\, e^t + C_1 e^{-t} \\ y(t) = C_2 e^t - C_1 e^{-t} \\ z(t) = C_3 e^t + C_1 e^{-t} \end{cases} \boxed{2 \text{ points}}$$

Exercice 2 (30 points) On désigne par $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ le rayon vecteur d'un point $M\,(x, y, z)$ et $r = \|\overrightarrow{r}\|$.

On définit le champ vectoriel
$$\overrightarrow{H_n} = r^n \overrightarrow{r}$$

où $n \in \mathbb{R}$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} r$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r}$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{\nabla r^n} = n r^{n-2} \overrightarrow{r}$
3. Calculer :
   (a) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H_n}$
   (b) $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H_n}$
4. $\overrightarrow{H_n}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?. Justifier la réponse.
5. Trouver le potentiel scalaire (s'il existe) associé à $\overrightarrow{H_n}$.
6. Soit $\overrightarrow{W}$ un champ conservatif défini par : $\overrightarrow{W} = A \dfrac{x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$ où A est une constante donnée.
   Trouver le champ $\varphi = \varphi\,(M)$ tel que $\overrightarrow{\nabla} \varphi = \overrightarrow{W}$.

Solution 2 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

1. $\overrightarrow{\nabla} r = \dfrac{\partial r}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial r}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial r}{\partial z}\overrightarrow{k}$

   $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(2x)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{r}$

   $\boxed{\text{1 point}}$

   de même : $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$ $\boxed{\text{1 point}}$

   alors :
   $$\overrightarrow{\nabla} r = \frac{x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}}{r} = \frac{\overrightarrow{r}}{r} \;\boxed{\text{1 point}}$$

   $$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1$$
   $$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r} = 3 \;\boxed{\text{1 point}}$$

   $$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

   x, y, z sont des variables indépendantes alors :
   $$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0} \;\boxed{\text{2 points}}$$

2. $\overrightarrow{\nabla} r^n = nr^{n-1}\,\overrightarrow{\nabla} r = nr^{n-1}\dfrac{\overrightarrow{r}}{r} = nr^{n-2}\overrightarrow{r}$ $\boxed{\text{3 points}}$
3. $\overrightarrow{H} = r^n\overrightarrow{r}$
   (a) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\cdot(r^n\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\nabla} r^n\cdot\overrightarrow{r} + r^n\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{r}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $= nr^{n-2}\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r} + 3r^n = nr^{n-2}r^2 + 3r^n$
   Finalement :
   $$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = (n+3)\,r^n \ \boxed{\text{2 points}}$$
   (b) $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\times(r^n\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\nabla} r^n\times\overrightarrow{r} + r^n\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{r}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   $= nr^{n-2}\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}\times\overrightarrow{r} + r^n\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{r}\right)$
   on a : $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$ alors :
   $$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{0} \ \boxed{\text{2 points}}$$
4. $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ alors il dérive d'un potentiel scalaire. $\boxed{\text{2 points}}$
5. Soit $f = f(M)$ tel que $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{H} \Longrightarrow df = \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = r^n\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{dr} = r^n r dr = r^{n+1}dr$ $\boxed{\text{3 points}}$
   $f(M) = \displaystyle\int r^{n+1}dr = \frac{r^{n+2}}{n+2} + C$ $\boxed{\text{2 points}}$
6. $\overrightarrow{W} = A\dfrac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = A\dfrac{\overrightarrow{r}}{r^5} = A\overrightarrow{H_{-5}}$ $\boxed{\text{2 points}}$
   Alors $\varphi(M) = A\,f(M)|_{n=-5} = A\left.\dfrac{r^{n+2}}{n+2}\right|_{n=-5} + K = -\dfrac{A}{3r^3} + K$ $\boxed{\text{3 points}}$

Exercice 3 On considère la forme différentielle :

$$\omega = \left(2x^2 + y^2 + z^2 + 1\right)dx + xydy + xzdz$$

1. Montrer que ω n'est pas une différentielle totale.
2. Trouver un facteur intégrant $\varphi = \varphi(x)$ tel que $\omega\varphi$ soit une différentielle totale.
3. Déterminer la fonction $f = f(x,y,z)$ telle que $df = \omega\varphi$.
4. Calculer la dérivée de f suivant la direction du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$ où $M(1,1,2)$ et $N(3,2,0)$

Solution 3 $\omega = (2x^2 + y^2 + z^2 + 1)\,dx + xydy + xzdz$

1. Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$

on a $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 2z$ et $\dfrac{\partial R}{\partial x} = z$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\dfrac{\partial P}{\partial z} \neq \dfrac{\partial R}{\partial x}$ donc ω n'est pas une différentielle totale $\boxed{\text{1 point}}$

2. Si $\omega\varphi$ est une différentielle totale alors on aura : $\dfrac{\partial (P\varphi)}{\partial z} = \dfrac{\partial (R\varphi)}{\partial x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\left(ou \;\; \dfrac{\partial (P\varphi)}{\partial y} = \dfrac{\partial (Q\varphi)}{\partial x} \right)$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial z}\varphi = \dfrac{\partial R}{\partial x}\varphi + R\dfrac{d\varphi}{dx}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\Longleftrightarrow 2z\varphi = z\varphi + xz\dfrac{d\varphi}{dx}$

$\Longleftrightarrow \varphi = x\dfrac{d\varphi}{dx}$ ou bien: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{d\varphi}{\varphi}$ $\boxed{\text{2 points}}$

en intégrant les deux membres on trouve : $\ln x + C = \ln\varphi$ soit :

$$\varphi(x) = x \;\; \boxed{\text{2 points}}$$

alors

$$\omega\varphi = \left(2x^3 + xy^2 + xz^2 + x\right)dx + x^2ydy + x^2zdz \;\boxed{\text{1 point}}$$

3. $\omega\varphi$ est une différentielle totale alors il existe une fonction $f = f(x,y,z)$ telle que $df = \omega\varphi$ $\boxed{\text{1 point}}$

c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x^3 + xy^2 + xz^2 + x$ $\boxed{\text{2 point}}$

$\Longrightarrow f(M) = \displaystyle\int (2x^3 + xy^2 + xz^2 + x)\,dx$

$f(M) = \dfrac{1}{2}x^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + g(y,z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2y + \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2y \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow g = h(z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$f(M) = \dfrac{1}{2}x^2(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + h(z)$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x^2z + h' = x^2z \Longrightarrow h' = 0 \Longrightarrow h = Cte = C$ $\boxed{\text{1 point}}$

Finalement :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right) + C \;\boxed{\text{2 points}}$$

4. $\overrightarrow{\nabla} f = (2x^3 + xy^2 + xz^2 + x)\,\overrightarrow{i} + x^2y\,\overrightarrow{j} + x^2z\,\overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Soit $\overrightarrow{e} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \dfrac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \dfrac{2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}}{3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial u} = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{e} = \dfrac{1}{3}\left((2x^3 + xy^2 + xz^2 + x)\,\overrightarrow{i} + x^2y\,\overrightarrow{j} + x^2z\,\overrightarrow{k}\right) \cdot 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}$

$= \dfrac{1}{3}\left(2(2x^3 + xy^2 + xz^2 + x) + x^2y - 2x^2z\right)$

$= \dfrac{1}{3}x(4x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2 + xy - 2xz)$ $\boxed{\text{2 points}}$