Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Examen de rattrapage 2012-2013 **Durée : 3h.**

Solutions

Exercice 1 (40 points) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Déduire la matrice $\exp(At)$ où t est réel.
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
4. Soit le système différentiel :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 6y + 3z \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 4y + 2z \\ \frac{dz}{dt} &= 6y - 3x - 3z \end{aligned} \qquad (S)$$

Déduire la solution du système (S) :

(a) En utilisant la matrice $\exp(At)$.

(b) A l'aide des valeurs propres et les vecteurs propres.

Solution 1 :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 24 & -12 \\ -8 & 16 & -8 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} = -4A$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $A^3 = A^2 \times A = -4A \times A = -4A^2 = (-4)^2 A$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Soit $A^n = (-4)^{n-1} A$ $\boxed{\text{2 points}}$

   En effet si $A^n = (-4)^{n-1} A$

   Alors $A^{n+1} = A^n A = (-4)^{n-1} A \times A = (-4)^{n-1} A^2 = (-4)^n A$

2. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$= I + At + \frac{1}{2!}(-4)At^2 + \frac{1}{3!}(-4)^2At^3 + \frac{1}{4!}(-4)^3At^4 + \cdots \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$= I - \frac{1}{4}\left(-4At + \frac{1}{2!}(-4)^2At^2 + \frac{1}{3!}(-4)^3At^3 + \frac{1}{4!}(-4)^4At^4 + \cdots\right)$$

$$= I - \frac{1}{4}A\left(-4t + \frac{1}{2!}(-4t)^2 + \frac{1}{3!}(-4t)^3 + \frac{1}{4!}(-4t)^4 + \cdots\right) \quad \boxed{\text{2 points}}$$

$$-4t+\frac{1}{2!}(-4t)^2+\frac{1}{3!}(-4t)^3+\frac{1}{4!}(-4t)^4+\cdots=e^{-4t}-1$$

$$\Longrightarrow \exp(At)=I-\frac{1}{4}A\left(e^{-4t}-1\right)\ \boxed{2\text{ points}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-6&3\\2&-4&2\\-3&6&-3\end{pmatrix}\left(e^{-4t}-1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7-3e^{-4t}&6e^{-4t}-6&3-3e^{-4t}\\2-2e^{-4t}&4e^{-4t}&2-2e^{-4t}\\3e^{-4t}-3&6-6e^{-4t}&3e^{-4t}+1\end{pmatrix}\ \boxed{2\text{ points}}$$

3. L'équation caractéristique de A :

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&-6&3\\2&-4-\lambda&2\\-3&6&-3-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3-4\lambda^2=-\lambda^2(\lambda+4)\ \boxed{3\text{ points}}$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_{1,2}=0$ double et $\lambda=-4$ simple $\boxed{3\text{ points}}$

Les vecteurs propres de A sont $v_i / Av_i=\lambda_i v_i$

On trouve :

$$\left\{V_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},V_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow\lambda_{1,2}=0,\left\{V_3=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow\lambda_3=-4\ \boxed{3\text{ points}}$$

4. $(S)\Longleftrightarrow \dfrac{d\varphi}{dt}=A\varphi$ avec $\varphi(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$

(a) En utilisant la matrice $\exp(At)$: $\varphi(t)=e^{At}V$ $\boxed{2\text{ points}}$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7-3e^{-4t}&6e^{-4t}-6&3-3e^{-4t}\\2-2e^{-4t}&4e^{-4t}&2-2e^{-4t}\\3e^{-4t}-3&6-6e^{-4t}&3e^{-4t}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}7C_1-6C_2+3C_3+3(-C_1+2C_2-C_3)e^{-4t}\\2C_1+2C_3+2(-C_1+2C_2-C_3)e^{-4t}\\6C_2-3C_1+C_3+3(C_1-2C_2+C_3)e^{-4t}\end{pmatrix}\ \boxed{5\text{ points}}$$

(b) A l'aide des valeurs propres et les vecteurs propres :

$$\varphi(t)=a\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}e^{-4t}=\begin{pmatrix}2a-b-ce^{-4t}\\a-\frac{2}{3}ce^{-4t}\\b+ce^{-4t}\end{pmatrix}\ \boxed{7\text{ points}}$$

Exercice 2 (20 points) Dans le plan (xOy) on considère les points : $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,5)$, et $D(5,5)$.

1. Une particule se déplace sous l'action du champs des forces

$$\overrightarrow{F}=x^2\overrightarrow{i}-2(x+y)\overrightarrow{j}$$

suivant le trajet $ABCDA$. Calculer, à l'aide d'une intégrale curviligne, le travail effectué.

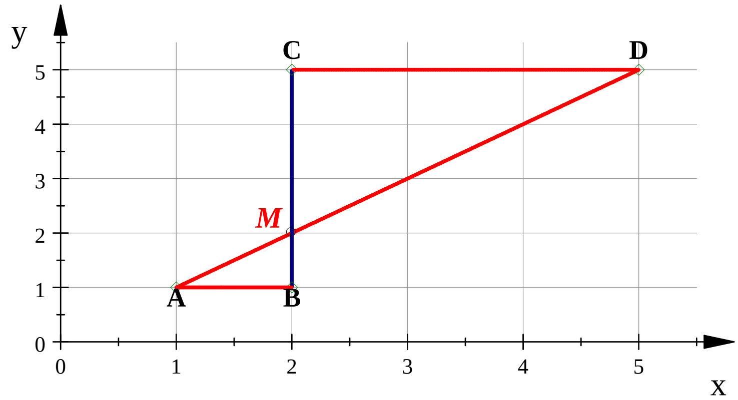
2. Peut-on calculer ce travail par une autre méthode. Justifier votre réponse et recalculer le travail.

Solution 2 : $\overrightarrow{F}=x^2\overrightarrow{i}-2(x+y)\overrightarrow{j}$

1. $W = \oint\limits_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$

$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = x^2 dx - 2\,(x+y)\,dy$

Figure $\boxed{\text{1 point}}$



$$\oint\limits_{\Gamma} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA} \boxed{\text{2 points}}$$

– Sur $AB : y = 1 \Longrightarrow dy = 0$ et $x : 1 \longrightarrow 2$

$$\int\limits_{AB} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{1}^{2} x^2 dx = \frac{7}{3} \boxed{\text{1 point}}$$

– Sur $BC : x = 2 \Longrightarrow dx = 0$ et $y : 1 \longrightarrow 5$

$$\int\limits_{BC} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -2\int\limits_{1}^{5} (2+y)\,dy = -40 \boxed{\text{1 point}}$$

– Sur $CD : y = 5 \Longrightarrow dy = 0$ et $x : 2 \longrightarrow 5$

$$\int\limits_{CD} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{2}^{5} x^2 dx = 39 \boxed{\text{1 point}}$$

– Sur $DA : x = y \Longrightarrow dx = dy$ et $x : 5 \longrightarrow 1$

$$\int\limits_{DA} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{5}^{1} (x^2 - 4x)\,dx = \frac{20}{3} \boxed{\text{2 points}}$$

$$W = \frac{7}{3} - 40 + 39 + \frac{20}{3} = 8 \boxed{\text{2 points}}$$

[10 points] Remarquons que $x^2dx - 2ydy$ est une différentielle totale alors $\oint x^2dx - 2ydy = 0$ par suite W devient : $W = -2\oint\limits_{\Gamma} xdy$

Sur AB et CD : $dy = 0$ donc $W_{AB} = W_{CD} = 0$

Sur BC $x = 2$ et $y : 1 \longrightarrow 5 \Longrightarrow W_{BC} = -2\int\limits_{1}^{5} 2dy = -16$

Sur $DA : x = y \Longrightarrow dx = dy$ et $x : 5 \longrightarrow 1 \Longrightarrow W_{DA} = -2\int\limits_{5}^{1} (x)\,dx = 24$

Finalement : $W = -16 + 24 = 8$

2. Le champs $\overrightarrow{F}$ n'a pas des points de discontinuité et le contour Γ est fermé donc on peut appliquer la formule de Green-Riemann : $\boxed{1 \text{ point}}$

$$\oint_{\Gamma+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{\Delta} (-2)\, dxdy \boxed{2 \text{ points}}$$

Soit M le point d'intersection des segments BC et DA alors le domaine $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ $\boxed{1 \text{ point}}$

$\Delta_1 = triangle\ AMB$

Pour y fixé : x varie de $x_m = y$ jusqu'à $x_M = 2$ et $1 \leq y \leq 2$ $\boxed{1 \text{ point}}$

$$\iint_{\Delta 1} (-2)\, dxdy = -2\int_1^2 \left(\int_y^2 dx\right) dy = -1 \boxed{2 \text{ points}}$$

$\Delta_2 = triangle\ CMD$

Pour y fixé : $x$varie de $x_m = 2$ jusqu'à $x_M = y$ et $2 \leq y \leq 5$ $\boxed{1 \text{ point}}$

$$\iint_{\Delta 2} (-2)\, dxdy = -2\int_2^5 \left(\int_2^y dx\right) dy = -9 = \int_{MDC} = -\int_{MCD} \boxed{2 \text{ points}}$$

donc : $W = -1 - (-9) = 8$

Exercice 3 (20 points) Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = (y + 2xz - 1)\ \overrightarrow{i} + \left(x - 3zy^2 - 1\right)\ \overrightarrow{j} + \left(x^2 - y^3\right)\ \overrightarrow{k}$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif.
3. Déterminer le potentiel scalaire $\varphi\,(x, y, z)$ associé à $\overrightarrow{H}$.

Solution 3 : Soit

$$\overrightarrow{H} = (y + 2xz - 1)\ \overrightarrow{i} + \left(x - 3zy^2 - 1\right)\ \overrightarrow{j} + \left(x^2 - y^3\right)\ \overrightarrow{k} = P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$$

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 2z - 6yz$ $\boxed{2 \text{ points}}$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \overrightarrow{k}$$

$$= \left(-3y^2 + 3y^2\right) \overrightarrow{i} + (2x - 2x)\ \overrightarrow{j} + (1 - 1)\ \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \boxed{4 \text{ points}}$$

2. On a : $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$,alors $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif

$\Longrightarrow \exists \varphi = \varphi\,(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi$ $\boxed{2 \text{ points}}$

3. $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow$

$$(y + 2xz - 1)\ \overrightarrow{i} + \left(x - 3zy^2 - 1\right)\ \overrightarrow{j} + \left(x^2 - y^3\right)\ \overrightarrow{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + 2xz - 1 \Longrightarrow \varphi = \int (y + 2xz - 1)\, dx = xy + x^2 z - x + f\,(y, z) \boxed{3 \text{ points}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x - 3zy^2 - 1 \Longleftrightarrow x + \frac{\partial f}{\partial y} = x - 3zy^2 - 1 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -3zy^2 - 1 \boxed{2 \text{ points}}$$

$$f(y,z) = \int \left(-3zy^2 - 1\right) dy = -zy^3 - y + g(z) \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\varphi = xy + x^2z - x - zy^3 - y + g(z) \boxed{1 \text{ point}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 - y^3 \Longleftrightarrow x^2 - y^3 + g'(z) = x^2 - y^3 \Longrightarrow g' = 0 \text{ donc } g = ct^e = C \boxed{3 \text{ points}}$$

$$\varphi(x,y,z) = xy + x^2z - x - zy^3 - y + C \boxed{1 \text{ point}}$$

Exercice 4 (20 points) On désigne par (S) la surface du paraboloïde définie par l'équation :

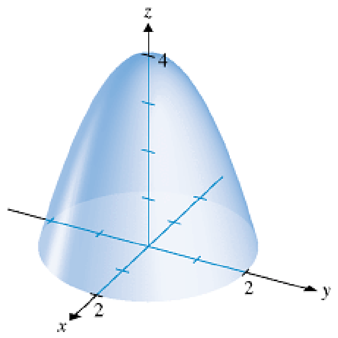
$$z = 4 - x^2 - y^2 \text{ et } z > 0$$

et on définit sur (S) le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{H} = 2x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j} - z\,\overrightarrow{k}$$

1. Déterminer une normale unitaire $\overrightarrow{n}$ sur (S) en un point $M(x,y,z)$.
2. En admettant l'orientation positive de (S) calculer le flux de $\overrightarrow{H}$ sortant de (S).

Solution 4 :



1. Si la surface (S) est définie par l'équation $z = f(x,y)$ alors une nomale en un point $M(x,y,z)$ à (S) est donnée par

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\text{grad}\,F} = \frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

où $F(x,y,z) = z - f(x,y)$

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}\,F}}{\left\|\overrightarrow{\text{grad}\,F}\right\|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + 1}}$$

on a $z = 4 - x^2 - y^2 \Longrightarrow F(M) = x^2 + y^2 + z - 4 = 0$

$\overrightarrow{\text{grad}\,F} = 2x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \Longrightarrow \left\|\overrightarrow{\nabla} F\right\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ $\boxed{4 \text{ points}}$ d'où

$$\overrightarrow{n} = \frac{2x\,\overrightarrow{i} + 2y\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \boxed{2 \text{ points}}$$

2. $\overrightarrow{H} = 2x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} - z\overrightarrow{k}$

Le flux sortant du paraboloïde est

$$\Phi = \iint\limits_{(S)} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint\limits_{(S)} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \dfrac{4x^2 + 4y^2 - z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$

Or sur (S) on a $z = 4 - x^2 - y^2$ alors

$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \dfrac{4x^2 + 4y^2 - (4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} = \dfrac{5x^2 + 5y^2 - z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Par projection sur (xOy) : $dS = \dfrac{dxdy}{|\gamma|} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$ $\boxed{\text{2 points}}$

Par suite $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = (5x^2 + 5y^2 - 4)\, dxdy$

$$\Phi = \iint\limits_{D} (5x^2 + 5y^2 - 4)\, dxdy \; \boxed{\text{2 points}}$$

où D est la projection de (S) sur (xOy)

en coordonnées polaires : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \implies (5x^2 + 5y^2 - 4) = (5r^2 - 4)$, $\boxed{\text{2 points}}$

$dxdy = rdrd\varphi$ avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $0 \leq r \leq 2$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\Phi = \displaystyle\int_0^2 r\,(5r^2 - 4) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^2 (5r^3 - 4r)\, dr$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\quad = 2\pi \left(\dfrac{5}{4} r^4 - 2r^2 \right) \Big|_0^2 = 24\pi$ $\boxed{\text{3 points}}$