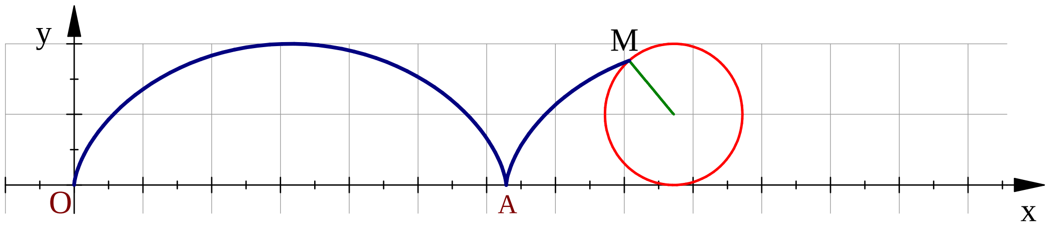
Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

Examen Final 2013-2014 - Semestre II **Durée : 2h :00**

SOLUTIONS

Exercice 1 (35 points) On appelle cycloïde la trajectoire d'un point $M(x, y)$, lié à un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur une droite.



La courbe est définie alors par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ avec

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

La première branche $(C) = \widetilde{OA}$ est obtenue par un tour complet du cercle sur lui même $(t \in [0, 2\pi])$.

1. Calculer la longueur de (C). $(8pts)$
2. On suppose que (C) est homogène, avec une densité linéique de masse σ, déterminer le centre de gravité de (C) $(15pts)$
3. Calculer le travail effectué par une particule qui se déplace sur (C) sous l'action du champ de force $\overrightarrow{F} = xy\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j}$. $(12pts)$

on donne : $\int x(1-\cos x)^2\,dx = \frac{1}{8}\left(6x^2 + 2x\sin 2x - 16x\sin x + \cos 2x - 16\cos x\right)$

Solution 1

1. $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

   $x = R(t - \sin t) \Longrightarrow dx = R(1-\cos t)\,dt$

   $y = R(1-\cos t) \Longrightarrow dy = R\sin t dt$

   $d\ell = R\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}dt = R\sqrt{2(1-\cos t)}dt$

   on a $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2} \Longrightarrow d\ell = 2R\sin\frac{t}{2}dt$ $\boxed{\text{5 points}}$

   donc $\ell = \int_C d\ell = 2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8R$ $\boxed{\text{3points}}$

2. Soit $G\,(X,Y)$ le centre de gravité, alors $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_C \overrightarrow{r}\,\sigma d\ell$

m est la masse totale de (C) : $dm = \sigma d\ell \Longrightarrow m = \displaystyle\int_C \sigma d\ell = 8\sigma R$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$X = \frac{1}{m}\int_C x\sigma d\ell = \frac{1}{8R}\int_0^{2\pi} R\,(t-\sin t)\left(2R\sin\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{R}{4}\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{R}{4}\left(\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt\right)\boxed{\text{2 points}}$$

– Pour la première intégrale, on fait l'intégration par parties :

$$\begin{cases} u = t & \Longrightarrow & du = dt \\ dv = \sin\dfrac{t}{2}dt & \Longrightarrow & v = -2\cos\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}dt = -2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 4\pi\boxed{\text{2 points}}$$

– dans la deuxième intégrale : $\sin t = 2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt = 2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt = \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0\boxed{\text{2 points}}$$

Alors $X = \dfrac{R}{4}(4\pi - 0) = \pi R$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$Y = \frac{1}{m}\int_C y\sigma d\ell = \frac{1}{8R}\int_0^{2\pi} R\,(1-\cos t)\left(2R\sin\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{R}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{R}{4}\int_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = \frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt\boxed{\text{2 points}}$$

– $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4$ $\boxed{\text{1 point}}$

– $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = -\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$Y = \frac{R}{2}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}R\boxed{\text{1point}}$$

3. $W = \displaystyle\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_C xydx + y^2dy$ $\boxed{\text{2 points}}$

$xydx + y^2dy = R\,(t-\sin t)\,R\,(1-\cos t)\,R\,(1-\cos t)\,dt + R^2\,(1-\cos t)^2\,R\sin t dt$

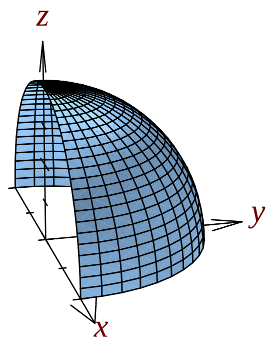
$= R^3t\,(1-\cos t)^2\,dt$ $\boxed{\text{5 points}}$

$$W = R^3\int_0^{2\pi} t\,(\cos t - 1)^2\,dt = R^3\,\frac{\cos 2t - 16\cos t + 2t\sin 2t - 16t\sin x + 6t^2}{8}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi^2R^3\boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 2 (35 points) On considère la surface fermée (S) constituée par la portion de la sphère : $x^2+y^2+z^2=R^2, y\geq 0, z\geq 0$, les plans (xOy) et (xOz)

Sur (S) on définit le champ vectoriel $\overrightarrow{H}=(x^2+y^2+z^2)^2\left(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}\right)$



1. Calculer le flux de $\overrightarrow{H}$ à travers (S) $(20pts)$
2. Calculer le moment d'inertie de la surface sphérique supposée homogène de masse m,en rotation autour de l'axe Oz, $(15pts)$

Solution 2

1. $\Phi=\displaystyle\iint_S \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS}$

Méthode de calcul au choix de candidats :

Calcul à l'aide d'une intégrale de surface

$S=S_1\cup S_2\cup S_3 \Longrightarrow \displaystyle\iint_S=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

- S_1 est la surface sphérique $x^2+y^2+z^2=R^2, y\geq 0, z\geq 0$

  La normale unitaire sur (S_1) est $\overrightarrow{n_1}=\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$ $\boxed{\text{2 points}}$ et $\overrightarrow{H}=r^4\overrightarrow{r}$

  $\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS_1}=r^4\overrightarrow{r}\cdot\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}dS_1=\dfrac{r^6}{r}dS_1=r^5dS_1$ $\boxed{\text{2 points}}$

  Or sur (S_1) : $r=R$ et $dS_1=R^2\sin\theta d\theta d\varphi$ avec $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi\in[0,\pi]$

  $\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS_1}=R^7\sin\theta d\theta d\varphi$ $\boxed{\text{2 points}}$

  $\Phi_1=\displaystyle\iint_{S_1}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS_1}=R^7\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\right)d\varphi=\pi R^7$ $\boxed{\text{2 points}}$

- (S_2) la portion du plan (xOy) limitée par le cercle $x^2+y^2=R^2$, la normale unitaire sur (S_2) est $\overrightarrow{n_2}=-\overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{2 points}}$

  $\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n_2}=(x^2+y^2+z^2)^2(-z)$, mais $z=0$ sur S_2 donc $\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS_2}=0$ et par suite

  $\Phi_2=\displaystyle\iint_{S_1}\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dS_2}=0$ $\boxed{\text{2 points}}$

- (S_3) la portion du plan (xOz) limitée par le cercle $x^2+z^2=R^2$, la normale unitaire sur (S_3) est $\overrightarrow{n_3}=-\overrightarrow{j}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n_3} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2(-y)$, mais $y=0$ sur S_3 donc $\Phi_3 = \iint\limits_{S_1} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS_3} = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

Finalement $\Phi = \pi R^7$. $\boxed{\text{2 points}}$

Formule d'Ostrogradski

$$\Phi = \iint\limits_{S} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint\limits_{V} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} dxdydz$$

où V est le volume limité par les surfaces S_1, S_2 et S_3

(a) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(r^4 \overrightarrow{r}\right) = r^4 \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{r}\right) + \overrightarrow{\nabla} r^4 \cdot \overrightarrow{r}$ $\boxed{\text{5 points}}$

$= r^4(3) + 4r^2 \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r} = 3r^4 + 4r^4 = 7r^4$ $\boxed{\text{5 points}}$

En utlisant les coordonnées sphériques : $dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ avec $r \in [0, R]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi \in [0, \pi]$ $\boxed{\text{5 points}}$

$\Phi = \iiint\limits_{\Sigma} 7r^6 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{\pi} 7r^6 \sin\theta d\varphi\right) d\theta\right) dr = \pi R^7$ $\boxed{\text{5 points}}$

2. Le moment d'inertie en rotation autour d'un axe Δ est donnée par :

$I_\Delta = \iint\limits_{S} \rho^2 dm = \iint\limits_{S} \rho^2 \sigma dS$ où ρ est la distance d'un point de la surface à l'axe Δ et σ la densité surfacique de masse. $\boxed{\text{2points}}$

la distance d'un point de la surface à l'axe Oz est :

$\rho^2 = x^2 + y^2 = R^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + R^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta = R^2 \sin^2\theta$ $\boxed{\text{3points}}$

$I_z = \sigma \iint\limits_{S} \left(R^2 \sin^2\theta\right)\left(R^2 \sin\theta d\theta d\varphi\right) = \sigma R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\varphi\right) d\theta$ $\boxed{\text{2points}}$

$= \pi\sigma R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta = \pi\sigma R^4 \int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2\theta\right) \sin\theta d\theta$ $\boxed{\text{3points}}$

$= \pi\sigma R^4 \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)_0^{\pi/2} = \pi\sigma R^4 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^4 \sigma$ $\boxed{\text{3points}}$

L'aire de la surface (S) est $\frac{1}{4}\left(4\pi R^2\right) = \pi R^2$ sa masse est donc $\pi\sigma R^2$ par suite $I_z = \frac{2}{3} m R^2$ $\boxed{\text{2points}}$

Exercice 3 (30 points) Soit $f(t)$ une fonction causale définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 0 & si \quad 1 < t < 2 \\ 1 & si \quad 2 < t < 3 \\ 0 & si \quad t > 3 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f(t)$. $(3pts)$
2. Calculer, la transformée de Laplace de $f(t)$. $(7pts)$

3. Déterminer la fonction $h(t)$ dont la transformée de Laplace est $(10pts)$

$$H(p) = \frac{1}{p^3 - 4p}$$

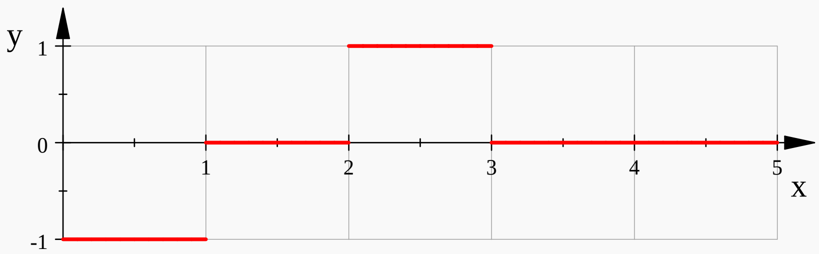
4. Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, l'équation différentielle :

$$y'' - 4y = f(t)$$

où $y = y(t)$ et $y(0) = y'(0) = 0$

Solution 3

1. Graphe de $f(t)$ $\boxed{\text{3points}}$



2. $F(p) = -\int_0^1 e^{-pt}dt + \int_2^3 e^{-pt}dt$ $\boxed{\text{3points}}$

$$= \left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^1 - \left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_2^3 = \frac{e^{-p}-1}{p} - \frac{e^{-3p}-e^{-2p}}{p} \boxed{\text{3points}}$$

$$= \frac{1}{p}\left(-1 + e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p}\right) \boxed{\text{1point}}$$

3. $H(p) = \frac{1}{p^3 - 4p} = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{8(p-2)} + \frac{1}{8(p+2)}$ $\boxed{\text{5points}}$

$$= -\frac{1}{4}\mathcal{L}(1) + \frac{1}{8}\left(\mathcal{L}\left(e^{2t}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-2t}\right)\right) \boxed{\text{5points}}$$

$$h(t) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{8}\right)u(t) = \frac{1}{4}(1 + \cosh 2t)\,u(t)$$

4. $y'' - 4y = f(t)$

$\mathcal{L}(y'' - 4y) = F(p)$

$\mathcal{L}(y'') = p^2Y - y(0)\,p - y'(0) = p^2Y$

Soit $Y = Y(p) = \mathcal{L}(y)$

L'équation auxiliaire est alos : $p^2Y - 4Y = F(p)$

$Y\left(p^2 - 4p\right) = F(p)$

$\Longrightarrow Y = \frac{F(p)}{p^2 - 4p} = \frac{-1 + e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p}}{p\left(p^2 - 4p\right)}$ $\boxed{\text{5points}}$

$Y(p) = \left(-1 + e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p}\right)H(p)$

$$y(t) = -h(t) + h(t-1) + h(t-2) - h(t-3) \boxed{\text{5points}}$$