Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

Examen partiel 2013-2014 - Semestre II

SOLUTIONS

Exercice 1 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique E par :

$$\forall v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (-5a + b + c, 5a - b - c, -5a + b + c)$$

avec $E = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f, E)$ $(5pts)$
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions. $(10pts)$
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. $(10pts)$
4. Calculer A^2, A^3, en déduire A^n $(\forall n \in \mathbb{N})$. $(5pts)$
5. Calculer la matrice $\exp(At)$. $(10pts)$
6. Déduire, de deux manière, la solution générale du système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = -5x + y + z \end{cases}$$

   (a) En utilisant la matrice $\exp(At)$. $(10pts)$
   (b) A l'aide de valeurs propres et les vecteurs propres. $(10pts)$

Solution 1

1. $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (-5, 5, -5)$
   $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1, 1)$
   $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, -1, 1)$

$$A = M(f, E) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

2. $\operatorname{Im} f = \left\{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid (X, Y, Z) = f(a, b, c)\right\}$

$$(X, Y, Z) \in \operatorname{Im} f \iff \begin{pmatrix} X = -5a + b + c \\ Y = 5a - b - c \\ Z = -5a + b + c \end{pmatrix}$$

On a $X = Z = -Y$
alors $(X,Y,Z) = (X,-X,X) = X(1,-1,1)$
soit donc : $\operatorname{Im} f = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X = Z = -Y\}$
$\operatorname{Im} f$ est généré par le vecteur $(1,-1,1)$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$ $\boxed{\text{5 points}}$

autrement :
$f(e_1) = -5f(e_2) = -5f(e_3)$
$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3) \\ &= -5af(e_2) + bf(e_2) + cf(e_2) = (-5a+b+c)\, f(e_2) \end{aligned}$$
donc $f(e_2)$ est une base.

même $f(e_1)$ peut être considérée comme base de $\operatorname{Im} f$

$\ker f = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)\}$
$$\text{si } (\alpha,\beta,\gamma) \in \ker f \iff \begin{cases} -5\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ -5\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \beta + \gamma = 5\alpha$$
$$(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{\beta+\gamma}{5}, \beta, \gamma\right) = \left(\frac{1}{5}\beta, \beta, 0\right) + \left(\frac{1}{5}\gamma, 0, \gamma\right) = \beta\left(\frac{1}{5}, 1, 0\right) + \gamma\left(\frac{1}{5}, 0, 1\right)$$
$\ker f$ est généré par les vecteurs $\left(\frac{1}{5},1,0\right)$ et $\left(\frac{1}{5},0,1\right)$ donc $\dim \ker f = 2$ $\boxed{\text{5 points}}$

3. Les valeurs propres sont les racine de l'équation caractéristique $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & 1 \\ 5 & -1-\lambda & -1 \\ -5 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{C_1 \longmapsto C_1 - C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda-5 & 1 & 1 \\ \lambda+5 & -1-\lambda & -1 \\ -\lambda-5 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda+5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{L_2 \longmapsto L_1 + L_2}{=} -(\lambda+5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{L_3 \longmapsto L_1 - L_3}{=} -(\lambda+5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda+5) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+5)\lambda^2 \; \boxed{\text{5 points}}$$
$$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 & \text{racine double} \\ \lambda_3 = -5 & \text{racine simple} \end{cases} \; \boxed{\text{2 points}}$$
Les vecteurs propres sont v_i tels que $Av_i = \lambda_i v_i$
$$\lambda_1 = 0 \leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : Av_1 = \lambda_1 v_1 = O$$
$$\Longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; \boxed{\text{2 points}}$$

$$\lambda_3 = -5 \leftrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} : Av_3 = \lambda_3 v_3 = -5v_3$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -5\alpha + \beta + \gamma = -5\alpha \\ 5\alpha - \beta - \gamma = -5\beta \\ -5\alpha + \beta + \gamma = -5\gamma \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ 5\alpha + 4\beta - \gamma = 0 \\ -5\alpha + \beta + 6\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = -\beta = \gamma$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$

4. $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -5 & -5 \\ -25 & 5 & 5 \\ 25 & -5 & -5 \end{pmatrix} = -5A \boxed{\text{2 points}}$$

$$A^3 = A^2 A = -5A^2 = (-5)^2 A \boxed{\text{1 point}}$$

Soit

$$A^n = (-5)^{n-1} A \ \forall n \geq 1 \boxed{\text{2 points}}$$

$$A^{n+1} = A^n A = (-5)^{n-1} AA = (-5)^{n-1} A^2 = (-5)^n A$$

5. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^{n-1} A t^n}{n!}$

$$= I - \frac{1}{5} A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n t^n}{n!} = I - \frac{1}{5} A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5t)^n}{n!} \boxed{\text{5 points}}$$

$$= I - \frac{1}{5} A \left(e^{-5t} - 1\right) \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(e^{-5t} - 1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-5t} & \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) & \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) \\ 1 - e^{-5t} & \frac{1}{5} e^{-5t} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) \\ e^{-5t} - 1 & \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) & \frac{1}{5}\left(6 - e^{-5t}\right) \end{pmatrix} \boxed{\text{3 points}}$$

6. La forme matricielle du système est $Y' = AY$

   (a) La solution est :

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \exp(At)\, V = \begin{pmatrix} e^{-5t} & \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) & \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) \\ 1 - e^{-5t} & \frac{1}{5} e^{-5t} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) \\ e^{-5t} - 1 & \frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right) & \frac{1}{5}\left(6 - e^{-5t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{-5t} - C_3\left(\frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{1}{5}\right) - C_2\left(\frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{1}{5}\right) \\ C_3\left(\frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{1}{5}\right) - C_1\left(e^{-5t} - 1\right) + C_2\left(\frac{1}{5}e^{-5t} + \frac{4}{5}\right) \\ C_1\left(e^{-5t} - 1\right) - C_2\left(\frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{1}{5}\right) - C_3\left(\frac{1}{5}e^{-5t} - \frac{6}{5}\right) \end{pmatrix} \boxed{5 \text{ points}}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{5}\left(C_2 + C_3 + (5C_1 - C_2 - C_3)\, e^{-5t}\right) \\ y(t) = \frac{1}{5}\left(5C_1 + 4C_2 - C_3 + (-5C_1 + C_2 + C_3)\, e^{-5t}\right) \\ z(t) = \frac{1}{5}\left(C_2 - 5C_1 + 6C_3 + (5C_1 - C_2 - C_3)\, e^{-5t}\right) \end{cases} \boxed{5 \text{ points}}$$

(b) $Y = \sum_{i=1}^{3} B_i V_i \exp(\lambda_i t)$ $\boxed{1 \text{ point}}$

$$= B_1 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} \boxed{4 \text{ points}}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{5}B_1 + \frac{1}{5}B_2 + B_3 e^{-5t} \\ y(t) = B_1 - B_3 e^{-5t} \\ z(t) = B_2 + B_3 e^{-5t} \end{cases} \boxed{5 \text{ points}}$$

Exercice 2 Dans l'espace rapporté au système $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ on définit le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{H} = 2xz\,\overrightarrow{i} - 2yz\,\overrightarrow{j} + \left(y^2 - x^2\right)\overrightarrow{k}$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$ $(3 + 7\ pts)$
2. $\overrightarrow{H}$ est-il un champ conservatif ? justifier. $(5pts)$
3. Soit la fonction $\mu = \mu(z)$ et le champ $\overrightarrow{W} = \mu\overrightarrow{H}$.
   (a) Trouver l'expression de μ tel que $\overrightarrow{W}$ soit conservatif. $(10pts)$
   (b) Déterminer tous les potentiels $f(x, y, z) \,/\, \overrightarrow{W} = \overrightarrow{\nabla} f$ $(10pts)$
   (c) Déterminer en particulier, f,tel que $f(1, 1, 1) = 1$ et $f(0, 1, 1) = 0$ $(5pts)$

Solution 2

Posons $\overrightarrow{H} = P\,\overrightarrow{i} + Q\,\overrightarrow{j} + R\,\overrightarrow{k}$

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2z - 2z + 0 = 0$ $\boxed{3 \text{ points}}$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

$$= (2y + 2y)\,\overrightarrow{i} + (2x + 2x)\,\overrightarrow{j} + (0 - 0)\,\overrightarrow{k} = 4y\,\overrightarrow{i} + 4x\,\overrightarrow{j} \boxed{7 \text{ points}}$$

2. Comme $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas conservatif. $\boxed{5 \text{ points}}$

3. $\overrightarrow{W} = \mu \overrightarrow{H}$ est conservatif $\Longleftrightarrow \mu = \mu(z)$ est un facteur intégrant de $\omega = \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr}$ alors

$$\mu\omega = 2\mu xzdx - 2\mu yzdy - \left(x^2 - y^2\right)\mu dz$$

(a) $\mu\omega$ est une différentielle totale, par suite :

$\dfrac{\partial \mu P}{\partial z} = \dfrac{\partial \mu R}{\partial x} \Longleftrightarrow \mu' P + \dfrac{\mu \partial P}{\partial z} = \mu \dfrac{\partial R}{\partial x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$2\mu' xz + 2x\mu = -2\mu x$

$\Longleftrightarrow \mu' z = -2\mu$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{d\mu}{\mu} = -2\dfrac{dz}{z}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\ln \mu = -2\ln z + C \quad \Longrightarrow$

$$\mu = \frac{k}{z^2} \quad \boxed{\text{5 points}}$$

et donc

$$\overrightarrow{W} = 2k\frac{x}{z}\overrightarrow{i} - 2k\frac{y}{z}\overrightarrow{j} - \frac{k}{z^2}\left(x^2 - y^2\right)\overrightarrow{k}$$

(b) $\overrightarrow{W} = \mu \overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \mu P = 2k\dfrac{x}{z}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f = \displaystyle\int 2k\frac{x}{z}dx = k\frac{x^2}{z} + g(y,z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial y} = \mu Q = -2k\dfrac{y}{z}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$g = -2k\displaystyle\int \frac{y}{z}dy = -k\frac{y^2}{z} + h(z)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f = k\dfrac{x^2}{z} - k\dfrac{y^2}{z} + h(z)$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = -k\dfrac{x^2}{z^2} + k\dfrac{y^2}{z^2} + h' = \mu R = -\dfrac{k}{z^2}\left(x^2 - y^2\right)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$h' = 0 \Longrightarrow h = Ct^{\underline{e}} = C$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$f(x,y,z) = \frac{k}{z}\left(x^2 - y^2\right) + C \quad \boxed{\text{2 points}}$$

(c) $f(1,1,1) = C = 1 \Longrightarrow f = \dfrac{k}{z}\left(x^2 - y^2\right) + 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

$f(0,1,1) = -k + 1 = 0 \Longrightarrow k = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$f = \frac{x^2 - y^2}{z} + 1 \quad \boxed{\text{1 point}}$$