Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

Examen Final 2014-2015 - Semestre II

Solutions

Exercice 1 (70 points) On désigne par (S_p) la partie de la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$ telle que $y \geq 0, z \geq 0$, et par (S) la surface fermée constituée par (S_p) et les plans de coordonnées . La normale est dirrigée vers l'extérieur. Soit

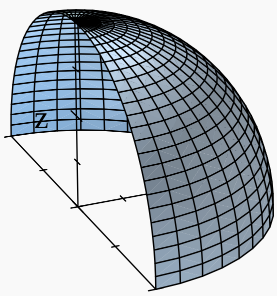
$$\overrightarrow{H}(M) = \frac{r\overrightarrow{r}}{r^2+a^2}$$

un champ vectoriel défini sur (S), où $\overrightarrow{r}$ *désigne le rayon vecteur d'un point* $M(x,y,z)$; $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ *et* $r = |\overrightarrow{r}|$,et a une constante positive.

1. On suppose que (S_p) est homogène de densité surfacique de masse $\sigma = Cte$.
   (a) Calculer la masse m de (S_p)
   (b) calculer I le moment d'inertie de (S_p) en rotation autour de l'axe Oz.
   (c) Exprimer I en fonction de m.
2. Soit $f(r)$ une fonction dérivable en r :
   (a) Montrer que $\overrightarrow{\nabla} f = \frac{df}{dr}\overrightarrow{\nabla} r$
   (b) Calculer $\overrightarrow{\nabla} r$, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{r}$
3. En posant $\overrightarrow{H} = f(r)\overrightarrow{r}$ avec $f(r) = \frac{r}{r^2+a^2}$, calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$
4. Calculer à l'aide d'une intégrale de surface le flux Φ de $\overrightarrow{H}$ sortant de (S)
5. Peut on utiliser le théorème d'Ostrogradski ?, Justifier. Si oui retrouver Φ

   On donne : $\displaystyle\int_0^a \frac{2a^2r^3+r^5}{(a^2+r^2)^2}\,dr = \frac{1}{4}a^2$
6. On désigne par (C) la frontière de (S_p). Sans faire de calcul intégral et à la base de théorème de Stokes, montrer que de deux façons, que la circulation de $\overrightarrow{H}$ sur la courbe (C) est nulle.

Solution 1



1. S_p est une surface sphérique, en coordonnées sphériques : $ds = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$

(a) $m = \iint\limits_{S_p} \sigma ds = \sigma a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\varphi \right) d\theta = \pi a^2 \sigma$ $\boxed{\text{5 points}}$

(b) $I_\Delta = \iint\limits_{S_p} \rho^2 \sigma ds,$ où ρ est la distance d'un point $M \in S_p$ à l'axe de rotation

$\Delta \equiv Oz$ donc $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

En coordonnées sphériques : $x = a\cos\varphi\sin\theta, y = a\sin\varphi\sin\theta$ donc $\rho = a\sin\theta$

$\rho^2\sigma ds = \left(a^2\sin^2\theta\right)\sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = a^4\sigma\sin^3\theta d\theta d\varphi$

$$I_z = \sigma \iint\limits_D a^4 \sin^3\theta d\theta d\varphi = a^4\sigma \int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \sin d\varphi \right) d\theta = \pi a^4 \sigma \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta$$

$$= \pi a^4 \sigma \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\theta \sin\theta d\theta = \pi a^4\sigma \int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta = \frac{2}{3}\pi a^4 \sigma \ \boxed{\text{8 points}}$$

(c) On a $m = \pi a^2 \sigma$ donc $I_z = \dfrac{2}{3} m a^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(a) $$\overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\overrightarrow{k}$$
$$= \frac{df}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) = \frac{df}{dr}\overrightarrow{\nabla} r \ \boxed{\text{5 points}}$$

(b) $$\overrightarrow{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\overrightarrow{k}$$
$$= \frac{1}{2}(2x)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}(2y)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\overrightarrow{j} + \frac{1}{2}(2z)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\overrightarrow{k}$$
$$= \frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\overrightarrow{r}}{r} \ \boxed{\text{5 points}}$$

$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{r} = 1+1+1 = 3$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{0} \ \boxed{\text{3 points}}$$

3. $\overrightarrow{H}(M) = \dfrac{r\overrightarrow{r}}{r^2+a^2} = f\overrightarrow{r}$

$$f(r) = \frac{r}{r^2+a^2} \Longrightarrow \frac{df}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{r^2+a^2}\right) = \frac{a^2-r^2}{\left(a^2+r^2\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(f\overrightarrow{r}\right) = \overrightarrow{\nabla} f\cdot\overrightarrow{r} + f\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{r} = \frac{df}{dr}\overrightarrow{\nabla} r\cdot\overrightarrow{r} + 3f$$
$$= \frac{a^2-r^2}{\left(a^2+r^2\right)^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}\cdot\overrightarrow{r} + 3f$$
$$= r\frac{a^2-r^2}{\left(a^2+r^2\right)^2} + 3\frac{r}{r^2+a^2} = 2r\frac{2a^2+r^2}{\left(a^2+r^2\right)^2} \ \boxed{\text{7 points}}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\times\left(f\overrightarrow{r}\right) = \overrightarrow{\nabla} f\times\overrightarrow{r} + f\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{r} = \frac{df}{dr}\frac{\overrightarrow{r}}{r}\times\overrightarrow{r} + f\times\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \ \boxed{\text{3 points}}$$

4. $\Phi = \iint\limits_S \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n} ds$

La surface $S = S_p \cup D_1 \cup D_2$

Où D_1 est le disque projection de S_p sur le plan xOy $(z=0)$: $D_1 = \left\{(x,y) \,/\, x^2+y^2 \leq a^2\right\}$

D_2 est le disque projection de S_p sur le plan xOz $(y=0)$: $D_2 = \left\{(x,z) \,/\, x^2+z^2 \leq a^2\right\}$

$\iint\limits_S = \iint\limits_{S_p} + \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2}$, et on admet l'orientation positive vers l'extérieur.

(a) S_p est une surface sphérique,en coordonnées sphériques : la normale unitaire en un point M est $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{a}$ et $ds = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, avec $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$

$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \dfrac{r\,\overrightarrow{r}}{r^2+a^2} \cdot \dfrac{\overrightarrow{r}}{a} = \dfrac{1}{a}\dfrac{r^3}{r^2+a^2}$

Sur (S_p) : $r = a$ donc $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \dfrac{1}{a}\dfrac{a^3}{a^2+a^2} = \dfrac{1}{2}$

Par suite : $\Phi_{S_p} = \dfrac{a^2}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\varphi\right) d\theta = \dfrac{1}{2}\pi a^2$ $\boxed{\text{7 points}}$

(b) sur D_1 : $z = 0$, la normale unitaire en un point sur D_1 est $-\overrightarrow{k}$

alors $\overrightarrow{H} \cdot \left(-\overrightarrow{k}\right)\Big|_{z=0} = -\dfrac{r\,\overrightarrow{r}}{r^2+a^2} \cdot \overrightarrow{k}\Big|_{z=0} = -\dfrac{rz}{r^2+a^2}\Big|_{z=0} = 0$

Par suite : $\Phi_{D_1} = 0$ $\boxed{\text{3 points}}$

(c) de même sur D_2 : $y = 0$, la normale unitaire en un point sur D_2 est $-\overrightarrow{j}$

alors $\overrightarrow{H} \cdot \left(-\overrightarrow{j}\right)\Big|_{y=0} = -\dfrac{r\,\overrightarrow{r}}{r^2+a^2} \cdot \overrightarrow{j}\Big|_{y=0} = -\dfrac{ry}{r^2+a^2}\Big|_{y=0} = 0$ et $\Phi_{D_2} = 0$ $\boxed{\text{3 points}}$

Finalement

$$\Phi = \Phi_{S_p} + \Phi_{D_1} + \Phi_{D_2} = \frac{1}{2}\pi a^2 \ \boxed{\text{2 points}}$$

5. (S) est une surface fermée et $\overrightarrow{H}$ est continue ainsi que ses dérivées partielles sur (S) et dans la zone (V) limitée par (S), donc on peut appliquer le théorème d'Ostrogradsy

$\Phi = \displaystyle\iiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} dv$

En utlilisant les coordonnées sphériques :$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ avec : $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$

$\Phi = 2\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a} \frac{2a^2+r^2}{(a^2+r^2)^2} r^3 \sin\theta dr\right) d\theta\right) d\varphi$

$= 2\left(\displaystyle\int_0^{a} \frac{2a^2r^3+r^5}{(a^2+r^2)^2} dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} d\varphi\right)$

$= 2\left(\dfrac{1}{4}a^2\right)(1)(\pi) = \dfrac{1}{2}\pi a^2$ $\boxed{\text{10 points}}$

6. La circulation de $\overrightarrow{H}$ sur la courbe (C) est donnée par : $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{S_p} \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} ds$

On a $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ donc $\displaystyle\iint_{S_p} \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} ds = 0$

$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif par suite $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$ $\boxed{\text{5 points}}$

Exercice 2 (30 points) :Soit (C) la branche de l'hélice définit par

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \\ z = 1 - \cos t \end{cases}$$

pour $0 \leq t \leq 2\pi$

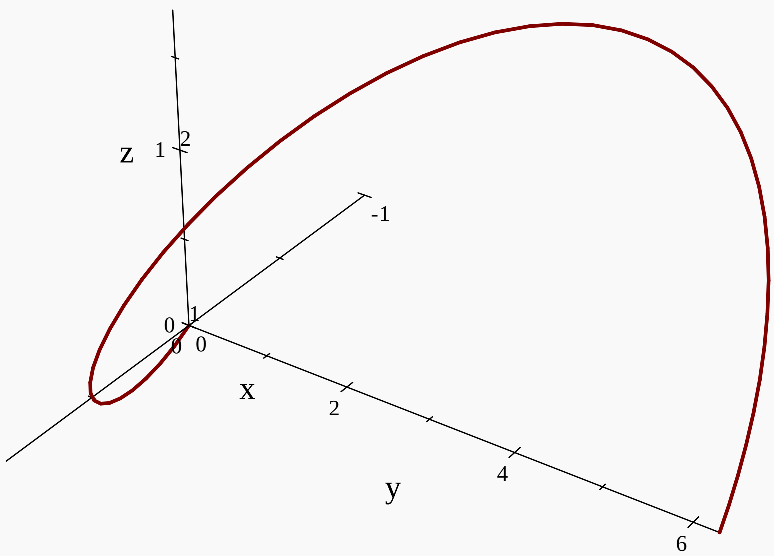
1. Calculer, à l'aide de l'intégrale curviligne, la longueur ℓ de (C).

2. Calculer la masse de (C) si sa densité linéaire de masse est $\lambda = (x+z)^2$
3. Soit une particule qui se déplace sur (C) sous l'action du champ de forces :

$$\overrightarrow{F} = \frac{\overrightarrow{r}}{r^2+1}$$

Calculer le travail effectué.

Solution 2



1. $d\ell = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \\ z = 1-\cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = \cos t dt \\ dy = dt \\ dz = \sin t dt \end{cases} \Longrightarrow d\ell = \sqrt{\cos^2 t + 1 + \sin^2 t} dt = \sqrt{2} dt \boxed{\text{5 points}}$$

$$\ell = \int_C d\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi \boxed{\text{5 points}}$$

2. $m = \int_C \lambda d\ell$

$\lambda = (x+z)^2 = (\sin t + 1 - \cos t)^2 = \sin^2 t + 1 + \cos^2 t - 2\cos t + 2\sin t - 2\cos t \sin t$
$= 2 - 2\cos t + 2\sin t - 2\cos t \sin t$

$$m = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (\sin t + 1 - \cos t)^2 dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (2 - 2\cos t + 2\sin t - 2\cos t \sin t) dt$$

$$= 2\sqrt{2}\left(t - \sin t + \cos t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)\Big|_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\pi \boxed{\text{10 points}}$$

3. $W = \int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_C \frac{\overrightarrow{r}}{r^2+1}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_C \frac{rdr}{r^2+1}$

$r = \sqrt{\sin^2 t + t^2 + (1-\cos t)^2} = \sqrt{t^2 - 2\cos t + 2}$
Pour $t = 0 : r = 0$
Au point où $t = 2\pi : r = 2\pi$

$$W = \int_0^{2\pi} \frac{rdr}{r^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ln\left(4\pi^2+1\right) \boxed{\text{10 points}}$$