Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

Examen partiel 2014-2015 - Semestre II

SOLUTIONS

Exercice 1 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique E par :

$$\forall v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (3a - 6b - 10c, -2a + 7b + 10c, 2a - 6b - 9c)$$

avec $E = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f, E)$. $(5pts)$
2. Calculer A^2, A^3, en déduire A^n $(\forall n \in \mathbb{N})$. $(5pts)$
3. On désigne par $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A,
   (a) Calculer $P(\lambda)$. $(5pts)$
   (b) Vérifier que $P(A) = O$, où O est la matrice nulle. $(3pts)$
4. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. $(5pts)$
5. Déduire la solution du système linéaire $(5pts)$

$$\begin{cases} 3a - 6b - 10c = 0 \\ -2a + 7b + 10c = -2 \\ 2a - 6b - 9c = 2 \end{cases}$$

6. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions. $(5pts)$
7. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. $(7pts)$
8. Calculer la matrice $\exp(At)$. $(10pts)$
9. Déduire, de deux manières, la solution générale du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 6y - 10z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 7y + 10z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - 6y - 9z \end{cases}$$

   (a) En utilisant la matrice $\exp(At)$. $(5pts)$
   (b) A l'aide de valeurs propres et les vecteurs propres. $(5pts)$

Solution 1

1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix} \boxed{\text{5 points}}$$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $A^3 = A^2 A = IA = A$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$A^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

3. $P(\lambda) = |A - \lambda I|$

   (a) $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & -10 \\ -2 & 7-\lambda & 10 \\ 2 & -6 & -\lambda-9 \end{vmatrix}$

   $L_1 \longrightarrow L_1 + L_2$

   $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 7-\lambda & 10 \\ 2 & -6 & -\lambda-9 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 7-\lambda & 10 \\ 2 & -6 & -\lambda-9 \end{vmatrix}$

   $C_2 \rightarrow C_2 - C_1$

   $P(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 10 \\ 2 & -8 & -\lambda-9 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 9-\lambda & 10 \\ -8 & -\lambda-9 \end{vmatrix}$

   $= (1-\lambda)\left((9-\lambda)(-9-\lambda)+80\right) = (1-\lambda)\left(-81+\lambda^2+80\right)$

   $= (1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$ $\boxed{\text{5 points}}$

   (b) $P(A) = -A^3 + A^2 + A - I = -A + I + A - I = O$ $\boxed{\text{3 points}}$

4. On a $P(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$ donc $\det(A) = -1 \neq 0$ donc A est inversible $\boxed{\text{3 points}}$

   de plus $A^2 = I \Longrightarrow A = A^{-1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

5. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Le système s'écrit : $AX = B$ alors

   $X = A^{-1}B = AB = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

   soit donc $a = -8, b = 6, c = -6$ $\boxed{\text{5 points}}$

6. Puisque $|A| \neq 0$ donc $rg(A) = 3 = \dim \operatorname{Im} f$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Une base de $\operatorname{Im} f$ est $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   Par suite $\ker f = \{(0,0,0)\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

7. $P(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

   (a) Les V.P de f sont $\lambda / P(\lambda) = 0$

   donc : $\lambda_1 = -1$ est une racine simple

   $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ est une racine double $\boxed{\text{3 points}}$

   (b) Les vect.propres sont $V_i = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tels que $AV_i = \lambda_i V_i$; $i = 1,2,3$

   $$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 6\beta - 10\gamma = \lambda_i \alpha \\ -2\alpha + 7\beta + 10\gamma = \lambda_i \beta \\ 2\alpha - 6\beta - 9\gamma = \lambda_i \gamma \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (3-\lambda_i)\alpha - 6\beta - 10\gamma = 0 \\ -2\alpha + (7-\lambda_i)\beta + 10\gamma = 0 \\ 2\alpha - 6\beta - (9+\lambda_i)\gamma = 0 \end{cases}$$

i. $\lambda_1 = -1$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4\alpha - 6\beta - 10\gamma = 0 \\ -2\alpha + 8\beta + 10\gamma = 0 \\ 2\alpha - 6\beta - 8\gamma = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = \gamma, \beta = -\gamma \text{ soit } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

ii. $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha - 6\beta - 10\gamma = 0 \\ -2\alpha + 6\beta + 10\gamma = 0 \\ 2\alpha - 6\beta - 10\gamma = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = 3\beta + 5\gamma$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta + 5\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

8. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= I \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= I \cosh t + A \sinh t \boxed{\text{5 points}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh t + \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sinh t$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh t + 3\sinh t & -6\sinh t & -10\sinh t \\ -2\sinh t & \cosh t + 7\sinh t & 10\sinh t \\ 2\sinh t & -6\sinh t & \cosh t - 9\sinh t \end{pmatrix} \boxed{\text{5 points}}$$

9. En posant $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ le système s'écrit :

$$Y' = AY$$

(a) En utilisant la matrice $\exp(At)$:

$$Y = \exp(At) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh t + 3\sinh t & -6\sinh t & -10\sinh t \\ -2\sinh t & \cosh t + 7\sinh t & 10\sinh t \\ 2\sinh t & -6\sinh t & \cosh t - 9\sinh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1(\cosh t + 3\sinh t) - 6C_2 \sinh t - 10C_3 \sinh t \\ -2C_1 \sinh t + C_2(\cosh t + 7\sinh t) + 10C_3 \sinh t \\ 2C_1 \sinh t - 6C_2 \sinh t + C_3(\cosh t - 9\sinh t) \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 \cosh t + (3C_1 - 10C_3 - 6C_2)\sinh t \\ y(t) = C_2 \cosh t + (10C_3 - 2C_1 + 7C_2)\sinh t \\ z(t) = C_3 \cosh t + (2C_1 - 6C_2 - 9C_3)\sinh t \end{array} \right. \boxed{\text{5 points}}$$

(b) A l'aide de valeurs propres et les vecteurs propres

$$Y = \sum_{i=1}^{3} B_i V_i e^{\lambda_i t}$$

$$Y = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \left(B_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t = \begin{pmatrix} B_1 e^{-t} + e^t (3B_2 + 5B_3) \\ B_2 e^t - B_1 e^{-t} \\ B_3 e^t + B_1 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = B_1 e^{-t} + e^t (3B_2 + 5B_3) \\ y(t) = -B_1 e^{-t} + B_2 e^t \\ z(t) = B_1 e^{-t} + B_3 e^t \end{cases}$$ 5 points

Remarque :

$$\exp(At) = I \frac{e^t + e^{-t}}{2} + A \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(I + A) e^t + \frac{1}{2}(I - A) e^{-t}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} e^{-t}$$
$$= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & 3e^{-t} - 3e^t & 5e^{-t} - 5e^t \\ e^{-t} - e^t & 4e^t - 3e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & 3e^{-t} - 3e^t & 5e^{-t} - 4e^t \end{pmatrix}$$

Donc les deux solution sont identiques

Exercice 2 (40 points) Soit le champ vectoriel

$$\overrightarrow{H} = \left(5x^2y - 8xz^3 + 9y^2\right) \overrightarrow{i} + \left(x^3 + 6yx\right) \overrightarrow{j} - 6x^2z^2 \overrightarrow{k}$$

1. Quel est le domaine de définition de $\overrightarrow{H}$ $(2pts)$
2. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}$, $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right)$ $(3 + 4 + 3 = 10pts)$
3. $\overrightarrow{H}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?. Justifier la réponse. $(3pts)$
4. Déterminer un facteur intégrant $\varphi = \varphi(x)$ tel que $\overrightarrow{F} = \varphi \overrightarrow{H}$ soit un champ de gradient. $(12pts)$
5. Trouver tous les potenties scalaires $f = f(x, y, z)$ associés à $\overrightarrow{F}$. $(13pts)$

Solution 2

1. $\overrightarrow{H}$ est défini $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. 2 points
2. $\overrightarrow{H} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$

   (a) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 10xy - 8z^3 + 6x - 12x^2z$ 3 points

   (b) $$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \overrightarrow{k}$$
   $$= (0 - 0) \overrightarrow{i} + \left(-24xz^2 + 12xz^2\right) \overrightarrow{j} + \left(3x^2 + 6y - 5x^2 - 18y\right) \overrightarrow{k}$$

$= -12xz^2 \overrightarrow{j} - (2x^2 + 12y) \overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{4 points}}$

(c) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}\right) = 0$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{H}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire $\boxed{\text{3 points}}$
4. Si $\varphi = \varphi(x)$ est un facteur intégrant alors $\overrightarrow{F} = \varphi \overrightarrow{H}$ est un champ de gradient et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ par suite $\dfrac{\partial P\varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial R\varphi}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial Q\varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial P\varphi}{\partial y} = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $P\varphi = (5x^2y - 8xz^3 + 9y^2)\,\varphi \Longrightarrow \dfrac{\partial P\varphi}{\partial z} = -24xz^2\varphi$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $R\varphi = -6x^2z^2\varphi \Longrightarrow \dfrac{\partial R\varphi}{\partial x} = -6z^2\left(2x\varphi + x^2\varphi'\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow -24xz^2\varphi + 6z^2\left(2x\varphi + x^2\varphi'\right) = 0$

   $\Longrightarrow 2\varphi - x\varphi' = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\Longleftrightarrow x\dfrac{d\varphi}{dx} = 2\varphi \Longleftrightarrow \dfrac{d\varphi}{\varphi} = 2\dfrac{dx}{x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\Longrightarrow \ln\varphi = 2\ln x$ soit donc

   $$\varphi = x^2 \quad \boxed{\text{2 points}}$$

5. $\overrightarrow{F} = \varphi\overrightarrow{H} = (5x^4y - 8x^3z^3 + 9x^2y^2)\,\overrightarrow{i} + (x^5 + 6yx^3)\,\overrightarrow{j} - 6x^4z^2\overrightarrow{k} = \overrightarrow{\nabla} f$

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 5x^4y - 8x^3z^3 + 9x^2y^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $f(x,y,z) = \displaystyle\int (5x^4y - 8x^3z^3 + 9x^2y^2)\,dx = x^5y - 2x^4z^3 + 3x^3y^2 + g(y,z)$ $\boxed{\text{4 points}}$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^5 + 6x^3y + \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^5 + 6yx^3 \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow g = h(z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $f = x^5y - 2x^4z^3 + 3x^3y^2 + h(z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -6x^4z^2 + h' = -6x^4z^2 \Longrightarrow h' = 0 \Longrightarrow h = C = Cte$ $\boxed{\text{1 point}}$

   Finalement

   $$f(x,y,z) = x^5y - 2x^4z^3 + 3x^3y^2 + C \quad \boxed{\text{2 points}}$$

Exercice 3 On considère la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & -x & -x & -x \\ x & x & -x & x \\ x & x & x & -x \\ x & -x & x & x \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de x la matrice A est inversible.$(2pts)$
2. Calculer A^2, $(5pts)$ Montrer que $A^2 - xA + x^2I = 0$ $(5pts)$
3. Déduire A^3et A^4 $(5pts)$
4. Déterminer $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A $(5pts)$
5. Vérifier que $P(A) = O$ $(3pts)$
6. Calculer la matrice inverse A^{-1}. $(5pts)$

7. Montrer que A est une matrice orthogonale $(5pts)$
8. Résoudre la système linéaire :$(5pts)$

$$\begin{cases} a-b-c-d=-4 \\ a+b-c+d=-2 \\ a+b+c-d=-6 \\ a-b+c+d=8 \end{cases}$$

Solution 3

1. la matrice A est inversible si $\det A = x^4 \neq 0$ donc si $x \neq 0$ $\boxed{\text{2 points}}$
2. $$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & -x & -x & -x \\ x & x & -x & x \\ x & x & x & -x \\ x & -x & x & x \end{pmatrix}=\frac{x}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^2=\frac{x^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2=\frac{x^2}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boxed{\text{5 points}}$$
$$A^2-xA=\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}-\frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^2 \end{pmatrix}=-x^2I$$
$\Longrightarrow A^2-xA+x^2I=O$ $\boxed{\text{5 points}}$
3. $A^2=xA-x^2I$
$A^3=xA^2-x^2A=x^2A-x^3I-x^2A=-x^3I$ $\boxed{\text{3 points}}$
$A^4=-x^3A$ $\boxed{\text{2 points}}$
4. $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^4-2x\lambda^3+3x^2\lambda^2-2x^3\lambda+x^4$ $\boxed{\text{5 points}}$
5. $P(A)=A^4-2xA^3+3x^2A^2-2x^3A+x^4I$
$=-x^3A-2x\left(-x^3I\right)+3x^2\left(xA-x^2I\right)-2x^3A+x^4I=O$ $\boxed{\text{3 points}}$
6. On a $A^2-xA+x^2I=O \Longrightarrow A-xI+x^2A^{-1}=O$ $\boxed{\text{3 points}}$
$$A^{-1}=-\frac{1}{x^2}(A-xI)=\frac{1}{2x}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{3 points}}$$
7. Pour $x=1$: $A^{-1}=A^T$ $\boxed{\text{5 points}}$

8. Soit : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A(2)$

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ 5 points