*Institut des Sciences Appliquées et Economiques*
*Cnam Liban*
le cnam

# Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

*Examen final 2015-2016 - Semestre II* **Durée : 2h :00**

centres de : Beyrouth,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

## SOLUTIONS

**Exercice 1 (10 points) Vrai ou Faux, justifier.**

*Chaque réponse correcte rapport 2 points, Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève 1 point.*

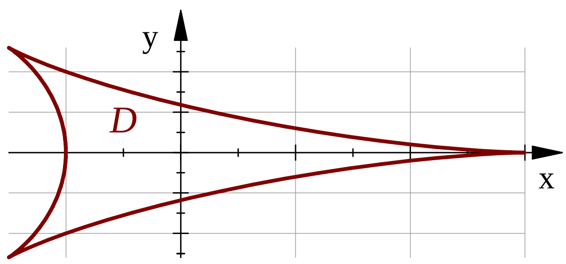
1. Si $\overrightarrow{H} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r^2}$ alors $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H}\, dxdydz$ où $V$ est la sphère $(O, R)$.
2. Si $f$ et $g$ sont deux champs scalaires et $\overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{\nabla(fg)} = f\overrightarrow{\nabla g}$.
3. $\overrightarrow{H} \in (xOy)$ alors $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \perp Oz$.
4. Si $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0$ alors $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$.
5. Soit $(S)$ l'intérieure de l'éllipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, alors la normal unitaire sur $(S)$ est $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$.

**Solution 1**

1. FAUX : $\overrightarrow{H}$ n'est pas continu en $O$, donc on ne peut pas appliquer la formule d'Ostrogradsky.
2. VRAI : $\overrightarrow{\nabla(fg)} = g\overrightarrow{\nabla f} + f\overrightarrow{\nabla(g)} = g \times 0 + f\overrightarrow{\nabla(g)} = f\overrightarrow{\nabla g}$
3. FAUX : $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \perp \overrightarrow{H}$ donc $//Oz$
4. FAUX Si $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = 0$ alors $\displaystyle\oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$, mais $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{H} = 0 \not\Rightarrow \displaystyle\oint_C \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$
5. VRAI $(S)$ est dans le plan $(xoy)$ : $f = z = 0$ donc $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{\nabla f}}{\left|\overrightarrow{\nabla f}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{k}}{1} = \overrightarrow{k}$.

**Exercice 2 (35 points)** On considère la courbe fermée $(C)$, du plan $(xoy)$ définie les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases} \quad \text{pour } t \in [-\pi, \pi]$$




1. Caluler le travail du champ $\overrightarrow{F} = y\,\overrightarrow{i} - x\,\overrightarrow{j}$ sur $(C)$.
2. Peut-on utiliser la formule de Green-Riemann, justier la réponse.
3. Déduire l'aire de la zone $(D)$ du plan $(xoy)$ limitée par $(C)$.

Solution 2

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos 2t \Longrightarrow dx = -2(\sin t + \sin 2t)\, dt \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \Longrightarrow dy = 2(\cos t - \cos 2t)\, dt \end{cases} \boxed{\textbf{5 points}}$$

1. $$\begin{aligned} \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} &= ydx - xdy = -2\left[(2\sin t - \sin 2t)(\sin t + \sin 2t) + (2\cos t + \cos 2t)(\cos t - \cos 2t)\right] dt \\ &= -2\left[2\sin^2 t + 2\sin t\sin 2t - \sin t\sin 2t - \sin^2 2t + 2\cos^2 t - 2\cos t\cos 2t + \cos t\cos 2t - \cos^2 2t\right] dt \\ &= -2\left[2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\sin t\sin 2t - \sin t\sin 2t - \sin^2 2t - \cos^2 2t - 2\cos t\cos 2t + \cos t\cos 2t\right] dt \\ &= -2\left[2 + \sin t\sin 2t - 1 - \cos t\cos 2t\right] dt \\ &= -2\left[1 + \sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t\right] dt \\ &= -2\left[1 - \cos 3t\right] dt = 2(\cos 3t - 1)\, dt \ \boxed{\textbf{10 points}} \end{aligned}$$

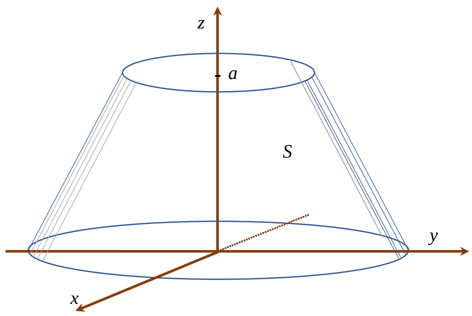
   $$W = \oint_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = 2\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 3t - 1)\, dt = 2\left(\frac{\sin 3t}{3} - t\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -4\pi \ \boxed{\textbf{5 points}}$$

2. La courbe $(C)$ est fermée, le champ $\overrightarrow{F}$ est défini et continu sur $(C)$ et dans $(D)$, ainsi que les dérivées partielles, donc on peut utiliser la formule de Green-Riemann $\boxed{\textbf{5 points}}$

3. $$W = \oint_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-1-1)\, dxdy = -2\iint_D dxdy \ \boxed{\textbf{5 points}}$$

   alors l'aire du domaine $(D)$ est $\iint_D dxdy = -\frac{1}{2}W = 2\pi$ $\boxed{\textbf{5 points}}$

**Exercice 3 (55 points)** Soit $(S)$ le tronc d'un cône de révolution : $z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}$, pour $0 \le z \le a$, supposée homogène de densité surfacique de masse $\rho = \sqrt{2}a$.

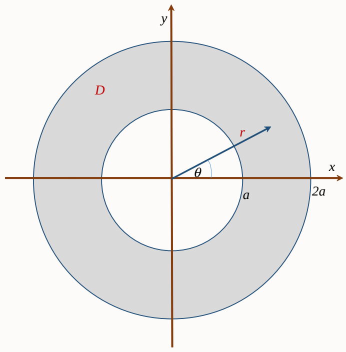



1. Calculer la masse, $m$, de $(S)$.
2. Calculer le moment d'inertie de $(S)$ en rotation autour de l'axe $oz$, exprimer $I_z$ en fonction de $m$.
3. Déterminer les coordonées du centre de gravité de $(S)$
4. On défini sur $(S)$ le champ vectoriel $\overrightarrow{H} = ax\overrightarrow{i} + ay\overrightarrow{j} + (z-2a)^2\overrightarrow{k}$. Calculer le flux de $\overrightarrow{H}$ traversant $(S)$.

Solution 3

1. La masse d'un élément de surface $dS$ est $dm = \rho dS = \sqrt{2}adS$ alors la masse totale est $m = \sqrt{2}a\iint_S dS$

   Soit $D$ la projection de $(S)$ sur le plan $xOy$ : $D$ est la zone limitée par les deux cercles :$(C_1) : x^2+y^2 = a^2$ et $(C_2) : x^2+y^2 = 4a^2$




La surface $(S)$ est définie par $F(x,y,z) = z + \sqrt{x^2+y^2} - 2a = 0$, la normale unitaire $\overrightarrow{n} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$ en un point $M(x,y,z) \in (S)$ est donnée par $\overrightarrow{n} = \dfrac{\overrightarrow{\nabla F}}{\left|\overrightarrow{\nabla F}\right|}$ :

$$\overrightarrow{\nabla F} = \frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{k} = \frac{x\overrightarrow{i}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\overrightarrow{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \overrightarrow{k} \Longrightarrow \left|\overrightarrow{\nabla F}\right| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

donc $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \overrightarrow{k}\right)$ **5 points**

La projection de $dS$ sur $(xOy)$ est $dxdy$ tel que $dS = \dfrac{dxdy}{|\gamma|} = \sqrt{2}dxdy$

d'où : $m = 2a \iint\limits_D dxdy$ **3 points**

en passant vers les coordonées polaires : $\left\{\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & a \le r \le 2a \\ y = r\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right|$ et $dxdy = rdrd\theta$ **3 points**

alors : $m = 2a \iint\limits_D dxdy = 2a \displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a} rdr\right)d\theta = 6\pi a^3$ **2 points**

L'intégrale $\iint\limits_D dxdy$ est l'aire de la zone $(D)$, limitée par les deux cercles : $(C_1)$ de rayon $a$ et $(C_2)$ de rayon $2a$ donc $\iint\limits_D dxdy = \pi(2a)^2 - \pi a^2 = 3\pi a^2$

2. Par définition le moment d'inertie d'un élément de masse par rapport à un axe $\Delta$ est : $dI_\Delta = \lambda^2 dm$ où $\lambda$ est la distance à l'axe $\Delta$.
   Dans notre cas la distance d'un point $M(x,y,z) \in (S)$ à l'axe $Oz$ est $\lambda = \sqrt{x^2+y^2}$ **2 points** et $dm = \sqrt{2}adS$
   donc $dI_z = \sqrt{2}a\left(x^2+y^2\right)dS$

   $I_z = \sqrt{2}a \iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS = 2a \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ **3 points**

   En coordonnées polaires : $x^2+y^2 = r^2$

   $I_z = 2a \iint\limits_D \left(r^2\right)rdrd\theta = 2a\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a} r^3dr\right)d\theta = 15\pi a^5$ **5 points**

   $\dfrac{I_z}{m} = \dfrac{15\pi a^5}{6\pi a^3} = \dfrac{5}{2}a^2$ alors $I_z = \dfrac{5}{2}ma^2$. **2 points**

3. On a $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{m}\iint\limits_S \overrightarrow{r}dm = \dfrac{1}{m}\iint\limits_S \overrightarrow{r}\rho dS = \dfrac{\sqrt{2}a}{m}\iint\limits_S \overrightarrow{r}dS = \dfrac{2a}{m}\iint\limits_S \overrightarrow{r}dxdy$

   où $\overrightarrow{OG} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, avec $z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}$

   ▲ $X = \dfrac{2a}{m}\iint\limits_D xdxdy = \dfrac{2a}{m}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a} r^2\cos\theta dr\right)d\theta = 0$ **4 points**

   ▲ $Y = \dfrac{2a}{m}\iint\limits_D ydxdy = \dfrac{2a}{m}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a} r^2\sin\theta dr\right)d\theta = 0$ **4 points**

▲ $$Z = \frac{2a}{m}\iint\limits_D \left(2a - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \frac{2a}{m}\iint\limits_\Delta (2a-r)\, rdrd\theta$$

$$= \frac{2a}{m}\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a}\left(2ar - r^2\right) dr\right) d\theta = \frac{4\pi a}{m}\int_a^{2a}\left(2ar-r^2\right) dr \ \boxed{\textbf{4 points}}$$

$$= \frac{4\pi a}{m}\left(ar^2 - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_a^{2a} = \frac{8\pi a^4}{3m} = \frac{8\pi a^4}{18\pi a^3} = \frac{4}{9}a \ \boxed{\textbf{3 points}}$$

Donc $G\left(0, 0, \frac{4a}{9}\right)$

4. $\Phi = \pm \iint\limits_S \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n}\, dS$

$$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n} = \left(ax\,\overrightarrow{i} + ay\,\overrightarrow{j} + (z-2a)^2\,\overrightarrow{k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x\,\overrightarrow{i}+y\,\overrightarrow{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \overrightarrow{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z-2a)^2\right)_{z=2a-\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(2a - \sqrt{x^2+y^2} - 2a\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2\right) \ \boxed{\textbf{5 points}}$$

$$\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{n}\, dS = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)\left(\sqrt{2}dxdy\right) = \left(a\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right) dxdy$$

$$\Phi = \pm\iint\limits_D \left(a\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right) dxdy \ \boxed{\textbf{3 points}}$$

Coordonnées polaires : $\sqrt{x^2+y^2} = r$

$$\Phi = \pm\int_0^{2\pi}\left(\int_a^{2a}\left(ar+r^2\right) rdr\right) d\theta = \pm 2\pi\int_a^{2a}\left(ar^2+r^3\right) dr \ \boxed{\textbf{2 points}}$$

$$= \pm 2\pi\left(a\frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4}\right)_a^{2a} = \pm 2\pi\left(\frac{7a^4}{3} + \frac{15a^4}{4}\right) = \pm\frac{73}{6}\pi a^4 \ \boxed{\textbf{5 points}}$$