Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

Examen partiel 2015-2016 - Semestre II **Durée : 1h :30**

centres de : Beyrouth,Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Documents autorisés : Notes de Cours de N.ASSAAD

Cahiers, Exercices résolus, Sessions, Téléphones : **STRICTEMENT INTERDITS**

SOLUTIONS

Exercice 1 (20 points) **Vrai ou Faux, justifier.**

Chaque réponse correcte rapport 2 points, Chaque réponse incorrecte ou non justifiée enlève 1 point.

1. Si $f = f(x, y, z)$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$
2. Le produit de deux fonctions à 2 variables est une fonction à 4 variables.
3. Si $f = f(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
4. Les courbes de niveaux de $f(M) = x^2 + y^2 + z$ sont de parabloïde d'axe Oz
5. Soit $f(x, y) = x^y$ donc $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$
6. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, telles que $|A| = |B|$, alors $A = B$
7. Si $A_{2\times 3}$ et B_{3x2} alors $AB = BA$.
8. Si A est une matrice carrée telle que $A^3 = A$ alors $A^2 = A$
9. SiA est une matrice carrée et $|A| = 0$ alors la matrice adjointe n'existe pas.
10. Si A est une matrice carrée et $|A| = -10$ alors A est inversible.

SOLUTION 1

1. **FAUX** : Si ces dérivées partielles sont continues on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
2. **FAUX** : $f(x; y) \times g(x, y) = h(x, y)$
3. **VRAI** :$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
4. **VRAI** : $f(M) = k \Longrightarrow z = k - x^2 - y^2$, parboloïde d'axe Oz et sommet $(0, 0, k)$
5. **VRAI** : $\ln f = \ln(x^y) = y \ln x$
   $$\frac{\partial(\ln f)}{\partial y} = \frac{\partial(y \ln x)}{\partial y} \Longrightarrow \frac{f'_y}{f} = \ln x \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = f \ln x = x^y \ln x$$
6. **FAUX** :Si $A = B$ alors $|A| = |B|$ mais la reciproque est fausse, Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,
   $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A \neq I$ mais $|A| = |I| = 1$
7. **FAUX** : En générale le produit des matrices n'est pas commutatif, en particulier, la matrice AB est carrée d'ordre 2 tandis que la matrice BA est d'ordre 3
8. **FAUX** : Si $A^2 = I$ alors $A^3 = A$.
9. **FAUX** : la matrice adjointe d'une matrice carrée toujours existe.
10. **VRAI** :$|A| = -10 \neq 0$ alors A est inversible.

Exercice 2 (15 points) Soit A une matrice carrée d'ordre n, et elle est nilpotente d'ordre 3. On considère la matrice $B = A + \lambda I$,où I est la matrice identité et λ une constante. Montrer que :

$$e^{Bt} = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2\right) e^{\lambda t}$$

SOLUTION 2

La matrice identité I_n commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n donc

$$e^{Bt} = e^{(A+\lambda I)t} = e^{At}e^{\lambda It} \quad \text{2 points}$$

$\lambda It = \begin{pmatrix} \lambda t & 0 & 0 \\ 0 & \lambda t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda t \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale alors $e^{\lambda It} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = Ie^{\lambda t}$ 5 points

A est nilpotente d'ordre 3 donc $A^k = O \ \forall k \geq 3$, par suite $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kt^k = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2$ 5 points

on a donc : $e^{Bt} = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2\right) Ie^{\lambda t} = \left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2\right) e^{\lambda t}$ 3 points

Exercice 3 (20 points) Soit

$$\omega = (2x - 2y - 2z + 4yz)\, dx + (-2x + 2y - 2z + 4xz)\, dy + (-2x - 2y + 2z + 4xy)\, dz \qquad (\omega)$$

Montrer que ω est une différentielle totale puis chercher la fonction $f = f(x, y, z)$ telle que $\omega = df$.

SOLUTION 3

on pose $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2 + 4z = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -2 + 4y = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = -2 + 4x = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases} \Longrightarrow \omega \text{ est différentielle totale} \quad \text{5 points}$$

donc il existe une fonction $f = f(x, y, z)$ telle que $\omega = df \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = R \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - 2z + 4yz \Longrightarrow f = \int (2x - 2y - 2z + 4yz)\, dx = x^2 - 2xy - 2xz + 4xyz + g(y, z)$ 5 points

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4xz + \dfrac{\partial g}{\partial y} = Q = 2y - 2x - 2z + 4xz \Longrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y - 2z \Longrightarrow g = y^2 - 2yz + h(z)$ 3 points

$f = x^2 - 2xz - 2xy + 4xyz + y^2 - 2yz + h(z) = x^2 + y^2 - 2xz - 2xy - 2yz + 4xyz + h(z)$ 3 points

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2x - 2y + 4xy + h' = R = 2z - 2y - 2x + 4xy \Longrightarrow h' = 2z$ donc $h = z^2 + C$ 2 points

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2xy - 2yz + 4xyz + C \quad \text{2 points}$$

Exercice 4 (45 points) On considère l'endomorphisme f, de $\mathbb{R}^3$, défini dans la base canonique (E) par :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, f(a,b,c) = (-2b-2c, -2a+b+c, -2a+3b-c)$$

1. Déterminer la matrice $A = M(f,E)$
2. Calculer $|A|$ et en déduire le rang de la matrice
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions.
4. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
5. Déterminer la solution du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -2y-2z \\ y' = -2x+y+z \\ z' = -2x+3y-z \end{cases}$$

SOLUTION 4

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 5 points
2. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{matrix}$

   $|A| = (0+4+12) - (4+0-4) = 16 \neq 0$ 3 points

   donc $rang\,(A) = 3$ 2 points
3. $\dim \operatorname{Im} f = rang\,(A) = 3$ donc une base $\operatorname{Im} f$ est $B = \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

   Soit $B = \{(0,-2,-2), (-2,1,3), (-2,1,-1)\}$ 3 points

   Par suite $\ker f = \{(0,0,0)\}$ et $\dim \ker f = 0$ 2 points
4. $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$

   $\underset{C_1 \mapsto C_1 - C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ \lambda-4 & 1-\lambda & 1 \\ \lambda-4 & 3 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$

   $\begin{cases} L_2 \mapsto L_2 + L_1 \\ L_3 \mapsto L_3 + L_1 \end{cases} \Longrightarrow P(\lambda) = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda-3 \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda-3 \end{vmatrix}$

   $= (4-\lambda)((1+\lambda)(3+\lambda)+1) = (4-\lambda)\left(\lambda^2+4\lambda+4\right) = (4-\lambda)(\lambda+2)^2$ 5 points

   Les V.P sont les racines de l'équation caractéristiques : $P(\lambda) = 0$

   On a donc $\lambda_1 = 4$ une racine simple et $\lambda_2 = -2$ racine double. 1 point

   Les $\overrightarrow{V}.P.$ sont v_i tels que $Av_i = \lambda_i v_i$

(i) $\lambda_1 = 4 \mapsto v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ / $Av_1 = \lambda_1 v_1 = 4v_1$

$$\begin{cases} -2b - 2c = 4a \\ -2a + b + c = 4b \\ -2a + 3b - c = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} -4a - 2b - 2c = 0 & (1) \\ -2a - 3b + c = 0 & (2) \\ -2a + 3b - 5c = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) + (3) \Longrightarrow -4a - 4c = 0 \Longrightarrow c = -a$
$(1) \Longrightarrow -4a - 2b + 2a = 0 \Longrightarrow b = -a$

alors $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a \end{pmatrix}$ un vecteur propre base est $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2 points

(ii) $\lambda_2 = -2 \leftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ / $Av_2 = \lambda_2 v_2 = -2v_2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -2\beta - 2\gamma = -2\alpha \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -2\beta \\ -2\alpha + 3\beta - \gamma = -2\gamma \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 & (1) \\ -2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 & (2) \\ -2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3) \Longrightarrow \beta = \gamma$
$(2) \Longrightarrow 2\alpha = 3\gamma + \gamma \Longrightarrow \alpha = 2\gamma$

$v_2 = \begin{pmatrix} 2\gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ soit $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 points

5. Les solutions particulières du système sont Y_1, Y_2 et Y_3;

(•) Pour $\lambda_1 = 4 : Y_1 = V_1 e^{4t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ -e^{4t} \\ -e^{4t} \end{pmatrix}$ 4 points

(•) Pour $\lambda_2 = -2 : Y_2 = V_2 e^{-2t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$ 4 points

(•) La $3^{ième}$ solution Y_3 associée à λ_2 est $Y_3 = (V_2 t + V_3)\, e^{-2t}$ avec $(A - \lambda_2 I)\, V_3 = V_2$ 2 points

Soit $V_3 = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$

$$A - \lambda_2 I = A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)\, V_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m - 2n - 2p \\ 3n - 2m + p \\ 3n - 2m + p \end{pmatrix}$$

$(A - \lambda_2 I)\, V_3 = V_2 \Longrightarrow \begin{cases} 2m - 2n - 2p = 2 & (1) \\ -2m + 3n + p = 1 & (2) \\ -2m + 3n + p = 1 & (3) \end{cases}$ en fonction de p on a $[m = 2p + 4, n = p + 3]$

Les équations (2) et (3) sont identiques, donc le système n'est pas un système de Cramère, on peut trouver une solution simple pour $p = 0$, alors

$\begin{cases} 2m - 2n = 2 & (1) \\ -2m + 3n = 1 & (2) \end{cases}$ $(1) + (2) \Longrightarrow n = 3$ et par suite $m = 4$

Soit alors $V_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3 points

$$Y_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) e^{-2t} = \begin{pmatrix} (2t+4)\, e^{-2t} \\ (t+3)\, e^{-2t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix}$$ 2 points

La solution générale est $Y = \varphi(t)\, C = \sum_{i=1}^{3} C_i Y_i$

$$Y = \begin{pmatrix} e^{4t} & 2e^{-2t} & (2t+4)\, e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{-2t} & (t+3)\, e^{-2t} \\ -e^{4t} & e^{-2t} & te^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{-2t} + C_3 (2t+4)\, e^{-2t} \\ -C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} + C_3 (t+3)\, e^{-2t} \\ -C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} + C_3 te^{-2t} \end{pmatrix}$$ 2 points

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{4t} + (2C_2 + 4C_3 + 2C_3 t)\, e^{-2t} \\ y(t) &= -C_1 e^{4t} + (C_2 + 3C_3 + C_3 t)\, e^{-2t} \\ z(t) &= -C_1 e^{4t} + (C_2 + C_3 t)\, e^{-2t} \end{aligned}$$ 3 points