Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers

le cnam
Liban

# Algèbre Linéaire et Géométrie (MVA107)

**Examen partiel 2016-2017 - Semestre II** **Durée : 1h :30**

*centres de : Beyrouth, Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim*

## DOCUMENTS INTERDITS

## Solutions

**Exercice 1 (40 points)** On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique $\mathbb{E}$ par :

$$\forall v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = \ (a + c, a + 2b - 2c, -2a - 2b + c)$$

avec $\mathbb{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$ $(5pts)$
2. $f$ est-il inversible ? Justifier votre réponse.$(3pts)$
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$, en précisant les bases et les dimensions. $(10pts)$
4. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme $f$. $(12pts)$
5. Déduire la solution générale du système diffèrentiel : $(10pts)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x - 2y + z \end{cases}$$

où $x = x(t), y = y(t)$, et $z = z(t)$.

### Solution 1

1. $f(e_1) = (1, 1, -2)$ $\quad f(e_2) = (0, 2, -2)$ $\quad f(e_3) = (1, -2, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

2. On a $\det(A) = 0$, la matrice $A$ n'est pas inversible par suite $f$ n'est pas inversible. $\boxed{\textit{3 points}}$

3. $\det(A) = 0$ mais $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $\dim \operatorname{Im} f = rang A = 2$

- Soit $(X, Y, Z) = f(a, b, c)$, donc on a $\begin{cases} X = a + c \\ Y = a + 2b - 2c \\ Z = -2a - 2b + c \end{cases}$
  On remarque que $X + Y + Z = 0 \Longleftrightarrow Z = -X - Y$
  donc $(X, Y, Z) = (X, Y, -X - Y) = X(1, 0 - 1) + Y(0, 1, -1)$
  $\operatorname{Im} f = \{(X, Y, Z) / X + Y + Z = 0\}$ une base de $\operatorname{Im} f$ est $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ $\boxed{\textit{5 points}}$

- $\ker f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \diagup f(a,b,c) = (0,0,0)\right\}$

  Si $(a,b,c) \in \ker f \Longrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+2b-2c=0 \\ -2a-2b+c=0 \end{cases}$, d'où : $a=-c, b=\dfrac{3}{2}c$

  $(a,b,c) = \left(-c, \dfrac{3}{2}c, c\right) = c\left(-1, \dfrac{3}{2}, 1\right)$

  $\ker f = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \diagup a=-c, b=\dfrac{3}{2}c\right\}$ et le vecteur $\left(-1, \dfrac{3}{2}, 1\right)$ est une base de $\ker f$. $\boxed{\textit{5 points}}$

4. $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

   $C_1 \leftrightarrow C_1 - C_2$ :

   $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1+\lambda & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

   $L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1$ :

   $P(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

   $= (1-\lambda)\left((2-\lambda)(1-\lambda) - 2\right)$

   $= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda\right) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$ $\boxed{\textit{5 points}}$

   $P(\lambda)$ a trois racines simples : $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$ $\boxed{\textit{1 point}}$

   Les vecteurs propres associés sont $v_i \in \mathbb{R}^3$ tels que $Av_i = \lambda_i v_i$

   - $\lambda_1 = 0 : v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ; $Av_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+2b-2c=0 \\ c-2b-2a=0 \end{cases} \Longrightarrow a=-c$ et $b = \dfrac{3}{2}c$

     $v_1 = \begin{pmatrix} -c \\ \dfrac{3}{2}c \\ c \end{pmatrix}$ le vecteur de base est $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\textit{2 points}}$

   - $\lambda_2 = 1 : v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ; $Av_2 = v_2$

     $\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=\alpha \\ \alpha+2\beta-2\gamma=\beta \\ \gamma-2\beta-2\alpha=\gamma \end{cases} \Longrightarrow \gamma = 0$ et $\alpha = -\beta$

     $v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\textit{2 points}}$

   - $\lambda_3 = 3 : v_3 = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ ; $Av_3 = 3v_3$

     $\Longleftrightarrow \begin{cases} m+p=3m \\ m+2n-2p=3n \\ p-2n-2m=3p \end{cases} \Longrightarrow p = 2m$ et $n = -3m$

     $v_3 = \begin{pmatrix} m \\ -3m \\ 2m \end{pmatrix}$ ; $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\textit{2 points}}$

5. En posant $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le système s'écrit : $Y' = AY$, La matrice $A$ est diagonalisable $\boxed{\textit{2 points}}$

   La solution générale est $Y = \sum_{i=1}^{3} C_i V_i e^{\lambda_i t}$

   $Y = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$ $\boxed{\textit{3 points}}$ soit :

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{3t} \\ y(t) = \frac{3}{2} C_1 - C_2 e^t - 3C_3 e^{3t} \\ z(t) = C_1 + 2C_3 e^{3t} \end{cases} \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

**Exercice 2 (30 points)** On considère les matrices

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ M = B - I \text{ et } N = B + I$$

1. Calculer $B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $(8pts)$
2. Dans la suite, **on ne demande pas les réponses sous formes matricielles**. Calculer :
   (a) $M^n$ et $N^n$. $(5 + 5 = 10pts)$
   (b) Les matrices $\exp(Bt), \exp(Mt)$ et $\exp(Nt)$ $(6 + 3 + 3 = 12pts)$

Solution 2

1. $B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $\boxed{\textit{5 points}}$

   $B^3 = B^2 B = IB = B \qquad B^4 = B^2 B^2 = I^2 = I \cdots$

   On déduit, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : B^n = \begin{cases} I & si \quad n = 2k \\ B & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad \boxed{\textit{3 points}}$$

2. $M = B - I$, $N = B + I$

   (a) $M^2 = B^2 + I^2 - 2B = I + I - 2B = -2(B - I) = -2M$

   $M^3 = M^2 M = (-2M) M = -2(-2M) = (-2)^2 M$

   par récurrence on trouve, pour $n \neq 0$ :

$$M^n = (-2)^{n-1} M \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

   $N^2 = B^2 + I^2 + 2B = I + I + 2B = 2(B + I) = 2N$

on obtient, pour $n \neq 0$ :

$$N^n = 2^{n-1}N \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

(b) $\exp(Bt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^{2k}t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^{2k+1}t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{It^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Bt^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + B\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$= I\cosh t + B\sinh t$ $\boxed{\textit{6 points}}$

$\exp(Mt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1} Mt^n}{n!} = I - \frac{1}{2}M\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n t^n}{n!}$

$= I - \frac{1}{2}M\left(e^{-2t} - 1\right)$ $\boxed{\textit{3 points}}$

$\exp(Nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2)^{n-1} Nt^n}{n!} = I + \frac{1}{2}N\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2)^n t^n}{n!}$

$= I + \frac{1}{2}N\left(e^{2t} - 1\right)$ $\boxed{\textit{3 points}}$

**Exercice 3 (30 points)** En utilisant le spectre de la matrice, intégrer le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = 2y + z \\ \frac{dz}{dt} = -y + 2z \end{cases}$$

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 + 1\right)$ $\boxed{\textit{5 points}}$

$2 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2$ $\boxed{\textit{1 point}}$

$(2-\lambda)^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow (2-\lambda)^2 = -1 = j^2 \Longrightarrow 2 - \lambda = \pm j$

Donc 2 racines complexes $\lambda_{2,3} = 2 \pm j$ $\boxed{\textit{2 points}}$

$\lambda_1 = 2 \to v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ; $Av_1 = 2v_1$

$\begin{cases} 2a = 2a \\ 2b + c = 2b \\ 2c - b = 2c \end{cases} \Longrightarrow b = c = 0$ soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$ $\boxed{\textit{2 points}}$

$\lambda_2 = 2 + j \to v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} /Av_2 = (2+j)\, v_2$

$\begin{cases} 2\alpha = (2+j)\,\alpha \\ 2\beta + \gamma = (2+j)\,\beta \\ 2\gamma - \beta = (2+j)\,\gamma \end{cases} \Longrightarrow [\alpha = 0, \beta = -j\gamma]$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -j\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = u + jv$ $\boxed{\textit{3 points}}$

$\lambda_3 = 2 - j \to v_3 = u - jv$

$$X_1 = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right) e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{2t} \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

$$X_2 = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t \right) e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t} \quad \boxed{\textit{5 points}}$$

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 X_1 + C_3 X_2$$

$$= \left( C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right) e^{2t} \quad \boxed{\textit{2 points}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{2t} \\ y(t) = (C_2 \sin t - C_3 \cos t)\, e^{2t} \\ z(t) = (C_2 \cos t + C_3 \sin t)\, e^{2t} \end{array} \right. \quad \boxed{\textit{5 points}}$$