Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban

le cnam

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

*Examen de **rattrapage** 2013-2014 - Semestre I*

Solutions

Exercice 1 (35 points) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique $\mathbb{E}$ par :

$$\forall v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (2b-3a-2c, 4b-6a-4c, 3a-2b+2c)$$

avec $\mathbb{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$ $(2pts)$
2. Calculer A^2, A^3, en déduire A^n $(\forall n \in \mathbb{N})$. $(5pts)$
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f. $(8pts)$
4. Calculer la matrice $\exp(At)$. $(8pts)$
5. Soient $x = x(t), y = y(t)$ et $z = z(t)$ des fonctions de la variable réelle t vérifiants le système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 3x - 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 6x - 4z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x - 2y + 2z \end{cases} \qquad (S)$$

Déterminer la solution du système (S) :

(a) En utilisant la matrice $\exp(At)$. $(6pts)$

(b) A l'aide de valeurs propres et les vecteurs propres. $(6pts)$

Solution 1

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -6 \\ -18 & 12 & -12 \\ 9 & -6 & 6 \end{pmatrix} = 3A$ $\boxed{\text{2 points}}$

$A^3 = A^2 A = 3AA = 3A^2 = 3^2 A$

$$A^n = 3^{n-1} A \ \boxed{\text{3 points}}$$

3. $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -2 \\ -6 & 4-\lambda & -4 \\ 3 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(3-\lambda)$ $\boxed{\text{3 points}}$

$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \text{ double} \\ \lambda_3 = 1 \text{ simple} \end{cases}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Les valeurs propores sont V_i tels que $AV_i = \lambda_i V_i$

$$\left\{ V_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 3 \boxed{\text{3 points}}$$

4. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots$

$= I + At + \frac{1}{2!}3At^2 + \frac{1}{3!}3^2At^3 + \frac{1}{4!}3^3At^4 + \cdots$ $\boxed{\text{2 points}}$

$= I + \frac{1}{3}A\left(3t + \frac{1}{2!}3^2t^2 + \frac{1}{3!}3^3t^3 + \frac{1}{4!}3^4t^4 + \cdots\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$= I + \frac{1}{3}A\left(e^{3t} - 1\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\left(e^{3t} - 1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - e^{3t} & \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{3t} \\ 2 - 2e^{3t} & \frac{4}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{4}{3}e^{3t} \\ e^{3t} - 1 & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{3t} & \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

5. Soit $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

le système s'écrit donc $(S) : Y'(t) = AY(t)$ $\boxed{\text{2 points}}$

(a) $Y = \exp(At)V = \begin{pmatrix} 2 - e^{3t} & \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{3t} \\ 2 - 2e^{3t} & \frac{4}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{4}{3}e^{3t} \\ e^{3t} - 1 & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{3t} & \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 points}}$

$$= \begin{pmatrix} b\left(\frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}\right) - c\left(\frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}\right) - a\left(e^{3t} - 2\right) \\ b\left(\frac{4}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}\right) - a\left(2e^{3t} - 2\right) - c\left(\frac{4}{3}e^{3t} - \frac{4}{3}\right) \\ c\left(\frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}\right) - b\left(\frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}\right) + a\left(e^{3t} - 1\right) \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\left((-6a + 2b - 2c) + (3a - 2b + 2c)e^{3t}\right) \\ -\left((-6a + b - 4c) + (6a - 4b + 4c)e^{3t}\right) \\ (-3a + 2b + c) + (3a - 2b + 2c)e^{3t} \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

(b) $Y = C_1\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}C_1 - \frac{2}{3}C_2 - C_3e^{3t} \\ C_1 - 2C_3e^{3t} \\ C_2 + C_3e^{3t} \end{pmatrix} \boxed{\text{2 points}}$$

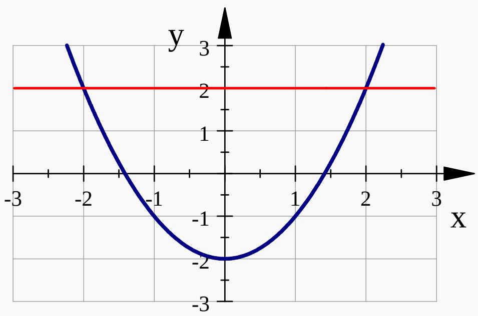
Exercice 2 (35 points) Soit le champ vectoriel

$$\vec{H} = (2x+z)\,\vec{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\vec{j} + x\,\vec{k}$$

1. Calculer $\vec{\nabla} \times \vec{H}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$ et $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)$
2. Calculer $\int_{C+} \vec{H} \cdot \vec{dr}$ où C est la portion de la parabole $y = x^2 - 2$ joignant les points $A\,(0,-2,0)$ et $B\,(2,2,0)$
3. $\vec{H}$ est il un champ de gradient ? Justifier votre réponse
4. Trouver une fonction $\mu\,(y)$ telle que $\vec{w} \cdot \vec{dr}$ soit une différentielle totale où $\vec{w} = \mu \vec{H}$
5. Trouver la fonction $\varphi\,(x,y,z)$ telle que $d\varphi = \vec{w} \cdot \vec{dr}$
6. Déduire la valeur de l'intégrale $\int_L \vec{w} \cdot \vec{dr}$ où (L) est une courbe joignant les points $A\,(1,a,a)$ et $B\,(a,a,1)$, et a est une constante donnée.

Solution 2

1. $\vec{\nabla} \times \vec{H} = -x\,\vec{i} + (2x+z)\,\vec{k}$ $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 1$ $\quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) = 0$ $\boxed{\text{3 points}}$
2. $\boxed{\text{Total 7 points}}$
   Graphe :



$$\int_C \vec{H} \cdot \vec{dr} = \int_C (2x+z)\,dx + \left(x^2 - y + xz - 1\right) dy + xdz \;\boxed{\text{2 points}}$$

Sur (C) $y = x^2 - 2 \Longrightarrow dy = 2xdx$ et $0 \le x \le 2$, $z = dz = 0$

$$\Longrightarrow \int_C \vec{H} \cdot \vec{dr} = \int_C 2xdx + \left(x^2 - y - 1\right) dy = \int_0^2 \left(2x + \left(x^2 - x^2 + 2 - 1\right) 2x\right) dx =$$

$$4\int_0^2 xdx = 8 \;\boxed{\text{3 points}}$$

3. On a trouvé que $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = -x\overrightarrow{i} + (2x+z)\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{H}$ n'est pas champ de gradient. $\boxed{\text{2 points}}$

4. $\boxed{\text{Total 10 points}}$

   soit $\mu = \mu(y) \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \mu\left((2x+z)\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}\right)$

   $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr}$ est une différentielle totale si :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(\mu\left(2x+z\right)\right)}{\partial y} = \mu'(2x+z) = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \mu(2x+z) \\ \dfrac{\partial \mu x}{\partial x} = \mu = \dfrac{\partial(2\mu x + \mu z)}{\partial z} = \mu \\ \dfrac{\partial \mu x}{\partial y} = \mu' x = \dfrac{\partial \mu\left(x^2 - y + xz - 1\right)}{\partial z} = x\mu \end{cases} \quad \boxed{\text{3 points}}$$

   donc, il faut que : $\mu' = \mu$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\Longleftrightarrow \dfrac{d\mu}{dy} = \mu \Longrightarrow \dfrac{d\mu}{\mu} = dy \Longrightarrow \mu = e^y$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$\overrightarrow{w} = (2x+z)e^y\overrightarrow{i} + \left(x^2 - y + xz - 1\right)e^y\overrightarrow{j} + xe^y\overrightarrow{k} \boxed{\text{2 points}} \tag{1}$$

   $\overrightarrow{w}$ est un champ de gradient

5. $\boxed{\text{Total 10 points}}$

   $d\varphi = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\nabla\varphi} = \overrightarrow{w}$

   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = (2x+z)e^y \Longrightarrow \varphi(x,y,z) = \int (2x+z)e^y dx = \left(x^2 + zx\right)e^y + f(y,z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(x^2 + zx\right)e^y + \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(x^2 - y + xz - 1\right)e^y \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = (-y-1)e^y$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $f(y,z) = \int (-y-1)e^y dy = -ye^y + g(z)$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\varphi(x,y,z) = \left(x^2 + zx\right)e^y + f(y,z) = \left(x^2 + zx\right)e^y - ye^y + g(z)$

   $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = xe^y + \dfrac{dg}{dz} = xe^y \Longrightarrow \dfrac{dg}{dz} = 0 \Longrightarrow g = cte = k$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\varphi(x,y,z) = \left(x^2 + zx - y\right)e^y + k$ $\boxed{\text{2 points}}$

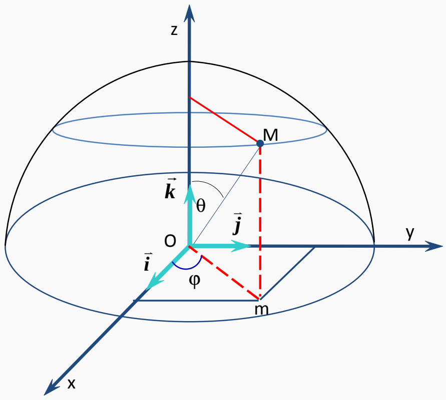
6. $\displaystyle\int_L \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{AB} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A) = \left(a^2 + a - a\right)e^a - (1 + a - a)e^a = \left(a^2 - 1\right)e^a$

   $\boxed{\text{5 points}}$

Exercice 3 (30 points) On considère la demi sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $z \geq 0$ fermée par le disque $x^2 + y^2 = R^2$

1. On suppose que cette surface (y inclus le disque) est chargée avec un densité de charge $\sigma(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$. Quelle est la charge totale.
2. Calculer, à l'aide d'une intégrale de surface, le flux à travers la surface fermée d'un champ vectoriel $\overrightarrow{H} = 2x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$
3. Retrouver le flux de $\overrightarrow{H}$ en utilisant la formule d'Ostrogradski, si c'est possible.

Solution 3



1. $\boxed{\text{Total 10 points}}$

$$Q = \iint\limits_{S} \frac{ds}{r} = Q_1 + Q_2 = \iint\limits_{S1} \frac{ds}{r} + \iint\limits_{S2} \frac{dxdy}{r} \boxed{\text{2 points}}$$

Sur la demi sphère, en coordonnées sphériques : $ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, où $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $r = R$

$$Q_1 = \iint\limits_{S1} \frac{ds}{r} = R\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \right) d\varphi = 2\pi R \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 2\pi R \boxed{\text{2 points}}$$

Sur le disque : $ds = dxdy$, en effet $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$ donc $\gamma = 1$

$$Q_2 = \iint\limits_{S2} \frac{ds}{r} = \iint\limits_{S2} \frac{dxdy}{r} \boxed{\text{2 points}}$$

En coordonnées polaires : $dxdy = rdrd\theta$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R$

$$Q_2 = \iint\limits_{S2} \frac{dxdy}{r} = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = 2\pi R \boxed{\text{2 points}}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 4\pi R \boxed{\text{2 points}}$$

2. $\boxed{\text{Total 10 points}}$

$$\Phi = \pm \iint\limits_{S} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{ds} = \pm \iint\limits_{S} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} ds$$

Sur la surface sphérique : $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}\overrightarrow{r} = \frac{1}{R}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right)$

$$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \left(2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right) \cdot \frac{1}{R}\left(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}\right)$$
$$= \frac{1}{R}\left(2x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{R}\left(x^2 + R^2\right) \boxed{\text{2 points}}$$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = R\sin^2\theta\cos^2\varphi + R$

$ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ avec $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} ds = \left(R\sin^2\theta\cos^2\varphi + R\right) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R^3\left(\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\right)$$

$$\Phi_1 = \pm R^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \right) \cos^2\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \right) d\varphi \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) + 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 \theta\right) \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \right) + 2\pi \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right)_0^{\pi/2} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)_0^{2\pi} + 2\pi \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(0 + 0 + 1 - \frac{1}{3} \right) (\pi) + 2\pi \right) = \pm \frac{8}{3} \pi R^3 \boxed{\text{5 points}}$$

Sur le disque : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k} \Longrightarrow \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = z = 0 \Longrightarrow \Phi_2 = 0 \boxed{\text{2 points}}$

$\Phi = \pm \frac{8}{3} \pi R^3 \boxed{\text{1 point}}$

3. $\boxed{\text{Total 10 points}}$

Le champs $\overrightarrow{H}$ est continue sur la surface et à l'interieure donc on peut appliquer la formule d'Ostrgradski

$$\Phi = \pm \iint_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{ds} = \pm \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{H} dv$$

$\operatorname{div} \overrightarrow{H} = 2 + 1 + 1 = 4 \boxed{\text{1 point}}$

$$\Phi = \pm \iiint_V 4 dv = \pm 4 \iiint_V dxdydz = \pm 4 \iiint_{V'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad \boxed{\text{4 points}}$$

$$= \pm 4 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \right) \right) = \pm 4 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 dr \right) = \pm \frac{8}{3} \pi R^3 \boxed{\text{5 points}}$$