Institut des Sciences Appliquées et Economiques
Cnam Liban
le cnam

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

Examen de ***Rattrapage*** *2014-2015* **Durée : 2h :00**

centres de : Beyrouth, Tripoli, Bickfaya, Nahr Ibrahim

Solutions

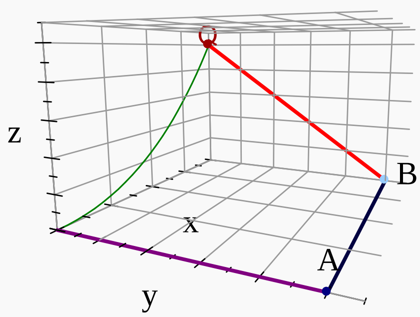
Exercice 1 (30 points) Soit le champ vectoriel :

$$\overrightarrow{F} = (x-z)\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + \beta x\overrightarrow{k}$$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}$
2. Calculer le travail de $\overrightarrow{F}$ le long des chemins Γ_i, allant de O à $Q(-2,0,1)$ dans le sens positif, lorsque :
   (a) Γ_1 est l'arc de parabole située dans le plan xoz d'équation $4z = x^2$
   (b) Γ_2 est la ligne brisée $OABQ$; $A(0,1,0)$, $B(-2,1,0)$
3. Pour quelle valeur de β le travail de $\overrightarrow{F}$ ne dépend-il que des extrémités du chemin ?
4. Quel est alors le travail le long d'un chemin allant de O à Q?

Solution 1

1. $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = 2 \qquad \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = -(\beta+1)\overrightarrow{j}$ $\boxed{\text{4 points}}$
2. $W_{\Gamma_i} = \int\limits_{\Gamma_i} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int\limits_{\Gamma_i} (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz$ $\boxed{\text{2 points}}$



(a) Sur Γ_1 : $\begin{cases} y = 0 & \Longrightarrow dy = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{4} & \Longrightarrow dz = \dfrac{1}{2}xdx \end{cases}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = (x-z)\,dx + ydy + \beta xdz = \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx + \frac{1}{2}\beta x^2 dx = \left(x + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{2}\right)x^2\right)dx$$

En allant de O à Q : x varie de 0 à -2

$$W_{\Gamma_1} = \int_0^{-2} \left(x + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{2}\right)x^2\right)dx = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}\beta$$ $\boxed{\text{3 points}}$

(b) $\Gamma_2 = [OA] \cup [AB] \cup [BQ]$

i) Sur $[OA]$: $x = z = 0$ donc $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = ydy$ par suite $W_{OA} = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$ $\boxed{2 \text{ points}}$

ii) Sur $[AB]$: $A(0,1,0)$, $B(-2,1,0)$ on a $y = 1$ et $z = 0$ donc $dy = dz = 0$

$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = xdx$ et $W_{AB} = \int_0^{-2} xdx = 2$ $\boxed{3 \text{ points}}$

iii) Sur $[BQ]$: $x = -2 \Longrightarrow dx = 0$ et $y + z = 1 \Longleftrightarrow z = 1 - y \Longrightarrow dz = -dy$

$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = ydy - 2\beta dz = (y + 2\beta)\, dy$

$W_{BQ} = \int_1^0 (y + 2\beta)\, dy = -2\beta - \frac{1}{2}$ $\boxed{3 \text{ points}}$

$W_{\Gamma_2} = W_{OA} + W_{AB} + W_{BQ} = \frac{1}{2} + 2 - 2\beta - \frac{1}{2} = 2 - 2\beta$ $\boxed{2 \text{ points}}$

3. le travail de $\overrightarrow{F}$ ne dépend-il que des extrémités du chemin s'il est un champ conservatif c'est-à-dire si $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, donc pour $\beta = -1$ $\boxed{5 \text{ points}}$

4. Pour $\beta = -1$, le travail de $\overrightarrow{F}$ est indépendant du trajet, et donc :

$W_{OQ} = (2 - 2\beta)_{\beta=-1} = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{3}\beta\right)_{\beta=-1} = 4$ $\boxed{3 \text{ points}}$

Exercice 2 (40 points) On définit sur $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme f :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = (2a - b + c, 4a - 2b + 2c, -2a + b - c)$$

relativement à la base canonique : $\mathbb{E} = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

1. Déterminer la matrice $A = M(f, \mathbb{E})$
2. Calculer $A^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. f est-il inversible ? Justifier votre réponse, déterminer f^{-1}s'il existe.
4. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f.
5. Calculer la matrice $\exp(At)$.
6. Déterminer la solution du système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y - z \end{cases} \qquad (S)$$

où$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ sont des fonctions de la variable réelle t

Solution 2

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{2 \text{ points}}$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -A$

$A^3 = A^2 A = -A^2 = A$

Par récurrence on trouve $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = -(-1)^n A = \begin{cases} -A & si \quad n = 2k, \ k \neq 0 \\ A & si \quad n = 2k+1 \end{cases} \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

3. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \boxed{2 \text{ points}}$

   La matrice $A = M(f, \mathbb{E})$ n'est pas inversible, donc f n'est pas inversible. $\boxed{3 \text{ points}}$

4. Les valeurs proprres sont les racines de l'équation caractéristique $P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

   $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 4 & -2-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda+1) \ \boxed{3 \text{ points}}$

   $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 & \text{racine simple} \\ \lambda_{2,3} = 0 & \text{racine double} \end{cases} \ \boxed{2 \text{ points}}$

   Les vecteurs propres sont $v_i / Av_i = \lambda_i v_i$

   On trouve

   $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = -1 \ \boxed{1 \text{ point}}$

   $\left\{ V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \lambda_{2,3} = 0 \ \boxed{2 \text{ points}}$

5. $\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \ \boxed{2 \text{ points}}$

   $= I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^n A (-t)^n}{n!} = I - A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = I - A(e^{-t} - 1) \ \boxed{5 \text{ points}}$

   $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} (e^{-t} - 1) = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-t} & e^{-t} - 1 & 1 - e^{-t} \\ 4 - 4e^{-t} & 2e^{-t} - 1 & 2 - 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{3 \text{ points}}$

6. Sous forme matricielle le système s'écrit :

$$Y'(t) = AY(t)$$

   où $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \ \boxed{2 \text{ points}}$

   La solution peut se déterminer par deux méthodes (on demande une seule) :

   A l'aide de la matrice exp(At) :

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2e^{-t} & e^{-t} - 1 & 1 - e^{-t} \\ 4 - 4e^{-t} & 2e^{-t} - 1 & 2 - 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_2(e^{-t} - 1) - C_3(e^{-t} - 1) - C_1(2e^{-t} - 3) \\ C_2(2e^{-t} - 1) - C_3(2e^{-t} - 2) - C_1(4e^{-t} - 4) \\ C_1(2e^{-t} - 2) - C_2(e^{-t} - 1) + C_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3C_1 - C_2 + C_3 + (-2C_1 + C_2 - C_3)e^{-t} \\ 4C_1 - C_2 + 2C_3 + (-4C_1 + 2C_2 - 2C_3)e^{-t} \\ C_2 - 2C_1 + (2C_1 - C_2 + C_3)e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{6 \text{ points}}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 3C_1 - C_2 + C_3 + (-2C_1 + C_2 - C_3)e^{-t} \\ y(t) &= 4C_1 - C_2 + 2C_3 + (-4C_1 + 2C_2 - 2C_3)e^{-t} \\ z(t) &= C_2 - 2C_1 + (2C_1 - C_2 + C_3)e^{-t} \end{aligned} \quad \boxed{2 \text{ points}}$$

A l'aide des vecteurs propres et valeurs propres :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{3} C_i V_i e^{\lambda_i t} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \boxed{4 \text{ points}}$$

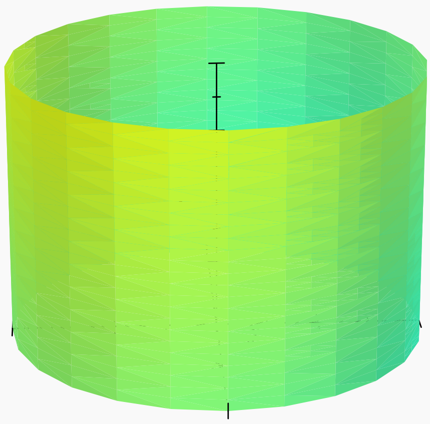
$$= \begin{pmatrix} C_2 - C_3 - C_1 e^{-t} \\ 2C_2 - 2C_1 e^{-t} \\ 2C_3 + C_1 e^{-t} \end{pmatrix} \boxed{2 \text{ points}}$$

$$\begin{array}{c} x(t) = C_2 - C_3 - C_1 e^{-t} \\ y(t) = 2C_2 - 2C_1 e^{-t} \\ z(t) = 2C_3 + C_1 e^{-t} \end{array} \boxed{2 \text{ points}}$$

Exercice 3 (30 points) Une surface cylindrique (Σ) de base $x^2 + y^2 = R^2$ est limitée par les plans $z = 0$ et $z = h > 0$

1. On suppose que cette surface est chargée avec une densité de charge $\sigma = x^2 + y^2 + z^2$. Calculer sa charge totale.
2. Calculer la masse de la surface supposée homogène et de densité de masse $\lambda = cte$.
3. Calculer, le flux à travers (Σ) du champ vectoriel $\overrightarrow{H} = 2x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$

Solution 3



1. $Q = \iint\limits_S \sigma(x,y,z)\, dS$

En coordonnées cylindriques $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ et $\begin{cases} dS = Rd\theta dz \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le h \end{cases}$

Sur $(S) : x^2 + y^2 = R^2 \Longrightarrow \sigma = R^2 + z^2$

$$Q = \iint\limits_{\Delta} (R^2 + z^2)\, Rd\theta dz = R\int_0^h \left(\int_0^{2\pi} (R^2 + z^2)\, d\theta \right) dz \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

$$= R\int_0^h \left((R^2 + z^2)\, \theta|_0^{2\pi} \right) dz = 2\pi R \int_0^h (R^2 + z^2)\, dz$$

$$= 2\pi R \left(R^2 z + \frac{z^3}{3} \right)_0^h = 2\pi R \left(R^2 h + \frac{h^3}{3} \right) \quad \boxed{5 \text{ points}}$$

2. $M = \iint\limits_S \lambda\,(x,y,z)\,dS$

$$= \lambda \iint\limits_S dS = \lambda \iint\limits_\Delta R d\theta dz = \lambda R \int\limits_0^h \left(\int\limits_0^{2\pi} d\theta \right) dz = 2\pi R h \lambda \quad \boxed{\text{5 points}}$$

3. $\Phi = \pm \iint\limits_{(\Sigma)} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dS} = \pm \iint\limits_{(\Sigma)} \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$

En coordonnées cylindriques la normale unitaire sur (S) est $\overrightarrow{n} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\overrightarrow{H} = 2x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = 2R\cos\theta\,\overrightarrow{i} + R\sin\theta\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = 2R\cos^2\theta + R\sin^2\theta = R\left(1 + \cos^2\theta\right)$$
$$= R\left(1 + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}R\,(3 + \cos 2\theta) \quad \boxed{\text{3 points}}$$

$$\Phi = \pm \iint\limits_{(\Sigma')} \frac{1}{2}R\,(3+\cos 2\theta)\, R d\theta dz = \frac{1}{2}R^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^h (3+\cos 2\theta)\, dz \right) d\theta \quad \boxed{\text{4 points}}$$

$$= \frac{1}{2}R^2 h \int\limits_0^{2\pi} (3+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}R^2 h \left(3\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi R^2 h \quad \boxed{\text{4 points}}$$