Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam
Liban

Algèbre Linéaire et Géométie (MVA107)

Solutions

Exercice 1 (35 points) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définit dans la base canonique E par :$\forall v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (-a+b-c, -4a+3b-2c, 2a-b+2c)$.
avec $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

1. Déterminer la matrice $A = M(f, E)$
2. Déterminer Im f et ker f, en précisant les bases et les dimensions.
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
4. Déduire la solution générale du système diffèrentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x+y-z \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x+3y-2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x-y+2z \end{cases}$$

Solution 1

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{5 points}}$

2. $|A| = 2$ donc $rang(A) = 3$ $\boxed{\text{1 point}}$ par suite

   $\ker f = \{(0,0,0)\}$ et $\dim \ker f = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $\dim \mathrm{Im} f = 3$ et une base est : $\{(-1,-4,2), (1,3,-1), (-1,-2,2)\}$ $\boxed{\text{3 points}}$

3. $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

   $\overset{C_1 \mapsto C_1 + C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1-\lambda & 3-\lambda & -2 \\ \lambda-1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

   $\overset{L_2 \mapsto L_2 - L_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_3 \mapsto L_3 + L_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

   $= (1-\lambda)(1)(2-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$ $\boxed{\text{7 points}}$

   $\lambda_{1,2} = 1$ est une V.P. double et $\lambda_3 = 2$ est une V.P. simple $\boxed{\text{3 points}}$

   Soient v_i les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i

   $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda_{1,2} = 1$

   $Av_1 = \lambda_1 v_1 \Longrightarrow \begin{cases} -a+b-c = a \\ -4a+3b-2c = b \\ 2a-b+2c = c \end{cases} \Longleftrightarrow c = 2a - b$

$$v_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\2a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\-b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

soient donc deux vecteurs de base $V_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{3 points}}$

$$v_3=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\longleftrightarrow\lambda_3=2$$

$$Av_2=\lambda_3v_3\Longrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta-\gamma=2\alpha\\-4\alpha+3\beta-2\gamma=2\beta\\2\alpha-\beta+2\gamma=2\gamma\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-3\alpha+\beta-\gamma=0 & (1)\\-4\alpha+\beta-2\gamma=0 & (2)\\2\alpha-\beta=0 & (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(3)\Longrightarrow\beta=2\alpha\\(1)\Longrightarrow\gamma=-\alpha\end{cases}\Longrightarrow v_3=\begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}\text{ soit }V_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\quad\boxed{\text{1 point}}$$

4. Le système s'écrit : $Y'=AY$

La matrice A est diagonalisable alors la solution générale est $Y=\sum_{i=1}^{3}C_iV_ie^{\lambda_it}$

$$Y=\left(C_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)e^t+C_3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}e^{2t}\quad\boxed{\text{5 points}}$$

Soit

$$\begin{aligned}x(t)&=C_1e^t+C_3e^{2t}\\y(t)&=C_2e^t+2C_3e^{2t}\\z(t)&=(2C_1-C_2)e^t-C_3e^{2t}\end{aligned}\quad\boxed{\text{5 points}}$$

Exercice 2 (20 points) Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{H}=-4\dfrac{x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}}{x^2+y^2+z^2+16}$

1. Calculer $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{H}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un champ conservatif.
3. Déterminer le potentiel scalaire $\varphi(x,y,z)$ associé à $\overrightarrow{H}$.

Solution 2

$$\overrightarrow{H}=-4\frac{x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}}{x^2+y^2+z^2+16}=-4\frac{\overrightarrow{r}}{r^2+16}\text{ où }\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}\text{ et }r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

1. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(-4\frac{x}{x^2+y^2+z^2+16}\right)=-4\frac{1.\left(x^2+y^2+z^2+16\right)-2x(x)}{\left(x^2+y^2+z^2+16\right)^2}=-4\frac{-x^2+y^2+z^2+16}{\left(x^2+y^2+z^2+16\right)^2}$$

de même : $$\frac{\partial}{\partial y}\left(-4\frac{y}{x^2+y^2+z^2+16}\right)=-4\frac{x^2-y^2+z^2+16}{\left(x^2+y^2+z^2+16\right)^2}$$

et $$\frac{\partial}{\partial z}\left(-4\frac{z}{x^2+y^2+z^2+16}\right)=-4\frac{x^2+y^2-z^2+16}{\left(x^2+y^2+z^2+16\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{H}=-4\frac{-x^2+y^2+z^2+16}{\left(x^2+y^2+z^2+16\right)^2}-4\frac{x^2-y^2+z^2+16}{\left(x^2+y^2+z^2+16\right)^2}-4\frac{x^2+y^2-z^2+16}{\left(x^2+y^2+z^2+16\right)^2}$$

$$= -4\frac{x^2+y^2+z^2+48}{(x^2+y^2+z^2+16)^2} = -4\frac{r^2+48}{(r^2+16)^2} \boxed{\text{5 points}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{8xy}{(x^2+y^2+z^2+16)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{8xz}{(x^2+y^2+z^2+16)^2} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{8yz}{(x^2+y^2+z^2+16)^2} = \dfrac{\partial R}{\partial r} \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0} \boxed{\text{5 points}}$$

2. $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{H}$ est un champ conservatif. $\boxed{\text{2 points}}$

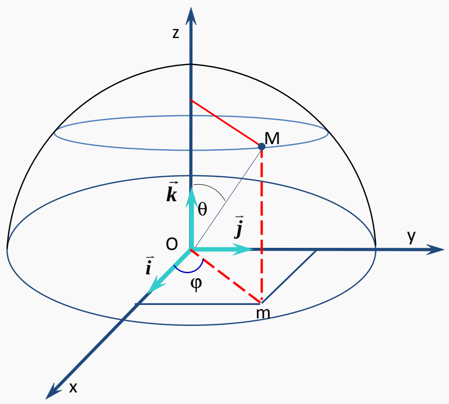
3. $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla}\varphi \Longleftrightarrow d\varphi = \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = -4\frac{\overrightarrow{r}}{r^2+16}\cdot\overrightarrow{dr} = -4\frac{rdr}{r^2+16}$ $\boxed{\text{3 points}}$

   $\varphi = -4\int\frac{rdr}{r^2+16} = -2\ln\left(r^2+16\right)+C$ $\boxed{\text{5 points}}$

Exercice 3 (30 points) On considère la demi sphère $x^2+y^2+z^2 = R^2$ et $z \geq 0$ fermée par le disque $x^2+y^2 = R^2$

1. On suppose que cette surface (y inclus le disque) est chargée avec un densité de charge $\sigma(x,y,z) = \frac{1}{r}$. Quelle est la charge totale.
2. Calculer, à l'aide d'une intégrale de surface, le flux à travers la surface fermée d'un champ vectoriel $\overrightarrow{H} = 2x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$
3. Retrouver le flux de $\overrightarrow{H}$ en utilisant la formule d'Ostrogradski, si c'est possible.

Solution 3



1. $Q = \iint\limits_S \frac{ds}{r} = Q_1 + Q_2 = \iint\limits_{S1}\frac{ds}{r} + \iint\limits_{S2}\frac{dxdy}{r}$

   Sur la demi sphère, en coordonnées sphériques : $ds = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$, où $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $r = R$

   $$Q_1 = \iint\limits_{S1}\frac{ds}{r} = R\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\right)d\varphi = 2\pi R\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = 2\pi R \boxed{\text{3 points}}$$

   Sur le disque : $ds = dxdy$, en effet $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{k}$ donc $|\gamma| = 1$

   $$Q_2 = \iint\limits_{S2}\frac{ds}{r} = \iint\limits_{S2}\frac{dxdy}{r}$$

En coordonnées polaires : $dxdy = rdrd\theta$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R$

$$Q_2 = \iint_{S2} \frac{dxdy}{r} = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = 2\pi R \ \boxed{\text{3 points}}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 4\pi R \ \boxed{\text{1 point}}$$

2. $\Phi = \pm \iint_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{ds} = \pm \iint_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$

Sur la surface sphérique : $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}\overrightarrow{r} = \frac{1}{R}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right)$

$$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = \left(2x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) \cdot \frac{1}{R}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(2x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{R}\left(x^2 + R^2\right) \ \boxed{\text{2 points}}$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = R\sin^2\theta\cos^2\varphi + R$$

$$ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \ \text{ avec } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \left(R\sin^2\theta\cos^2\varphi + R\right) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = R^3\left(\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\right) \ \boxed{\text{1 point}}$$

$$\Phi_1 = \pm R^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \right) \cos^2\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \right) d\varphi \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \right) + 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \right) + 2\pi \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right)_0^{\pi/2} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)_0^{2\pi} + 2\pi \right)$$

$$= \pm R^3 \left(\left(0 + 0 + 1 - \frac{1}{3} \right) (\pi) + 2\pi \right) = \pm \frac{8}{3}\pi R^3 \ \boxed{\text{6 points}}$$

Sur le disque : $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{k} \Longrightarrow \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{n} = -z = 0 \Longrightarrow \Phi_2 = 0$ $\boxed{\text{2 points}}$

$$\Phi = \pm \frac{8}{3}\pi R^3 \ \boxed{\text{2 points}}$$

3. Le champs $\overrightarrow{H}$ est continue sur la surface et à l'interieure donc on peut appliquer la formule d'Ostrgradski $\boxed{\text{2 points}}$

$$\Phi = \pm \iint_S \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{ds} = \pm \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{H} dv$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{H} = 2 + 1 + 1 = 4 \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$\Phi = \pm \iiint_V 4dv = \pm 4 \iiint_V dxdydz = \pm 4 \iiint_{\Sigma'} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi \ \boxed{\text{2 points}}$$

$$= \pm 4 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi \right) \right) = \pm 4 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 dr \right) = \pm \frac{8}{3}\pi R^3 \ \boxed{\text{2 points}}$$

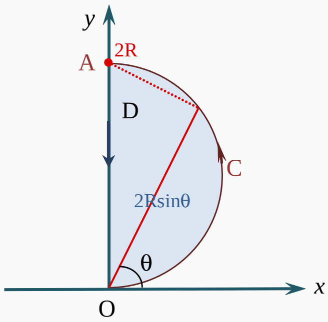
Exercice 4 (15 points) Dans le plan (xOy) on considère le demi- disque **homogène** (D) d'équation :

$$x^2 - 2Ry + y^2 \leq 0 \text{ et } x \geq 0$$

on désigne par (C) la courbe fermée frontière de (D). On définit sur (C) le champ des vecteurs $\overrightarrow{H}(x,y) = \overrightarrow{i} + \sqrt{x^2+y^2}\,\overrightarrow{j}$.

1. Calculer le travail W de $\overrightarrow{H}$ effectué le long de (C) parcouru dans le sens positif
2. Peut-on utiliser la formule Green Riemann. Si oui recalculer W

Solution 4



1. $W = \oint\limits_C \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_C \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} + \int\limits_{AO} \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr}$

   $\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = dx + \sqrt{x^2+y^2}dy$

   Sur (C) : en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r = 2R\sin\theta$

   $\begin{cases} x = 2R\sin\theta\cos\theta = R\sin 2\theta \\ y = 2R\sin^2\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = 2R\cos 2\theta d\theta \\ dy = 4R\cos\theta\sin\theta d\theta \end{cases}$

   $\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = (2R\cos 2\theta d\theta) + 8R^2\cos\theta\sin^2\theta d\theta$

   $= \left(2R\cos 2\theta + 8R^2\cos\theta\sin^2\theta\right)d\theta$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $W = \int\limits_C \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_0^{\pi/2}\left(2R\cos 2\theta + 8R^2\cos\theta\sin^2\theta\right)d\theta = \frac{8}{3}R^2$ $\boxed{\text{3 points}}$

   Sur AO : $x = dx = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = ydy$

   $\int\limits_{AO} \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \int\limits_{2R}^{0} ydy = -2R^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

   $W = \frac{8}{3}R^2 - 2R^2 = \frac{2}{3}R^2$ $\boxed{\text{1 point}}$

2. $\overrightarrow{H}$ est continue sur (C) ,et dans (D) donc on peut utiliser la formule Green Riemann $\boxed{\text{2 points}}$

   $W = \oint\limits_C \overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{dr} = \iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

   En coordonnées polaires : $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \frac{r\cos\theta}{r}rdrd\theta = r\cos\theta drd\theta$

   $W = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\int\limits_0^{2R\sin\theta} r\cos\theta dr\right)d\theta = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\cos\theta\Big|_0^{2R\sin\theta}d\theta = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{4R^2}{2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{2}{3}R^2$ $\boxed{\text{5 points}}$