Applications Linéaires

Exercices corrigés

Exercice 1

On considère les applications :
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+y, x-z)$
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x,y) = (x+2y, 3x-y, x+y)$

1. Déterminer si f et g sont des applications linéaires
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$, $\ker f$, $\operatorname{Im} g$ et $\ker g$
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$
4. Déterminer les matrices de f, g ,$f \circ g$ et de $g \circ f$

Solution 1 :

1. Il faut démontrer que $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$
   et de même pour g
2. $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0\}$
   si $u = (x,y,z) \in \ker f \Longrightarrow f(x,y,z) = (x+y, x-z) = (0,0)$
   c'est-à-dire : $\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Longrightarrow x = -y = z$
   Les vecteurs de $\ker f$ sont tels que $(x,y,z) = (x,-x,x) = x(1,-1,1)$
   $(1,-1,1)$ est une base de $\ker f$, $\dim \ker f = 1$
   $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$
   $\ker g = \{v \in \mathbb{R}^2 / g(v) = 0\}$
   si $v = (x,y) \in \ker g \Longrightarrow g(x,y) = (x+2y, 3x-y, x+y) = (0,0,0)$
   $\Longrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$, Solution $[x=0, y=0]$
   $\ker g = \{(0,0)\} \Longrightarrow \dim \ker g = 0$
3. $(f \circ g)(v) = f(g(u)) = f(g(x,y))$
   $= f((x+2y, 3x-y, x+y)) = (x+2y+3x-y, x+2y-x-y) = (4x+y, y)$
   $(g \circ f)(u) = g(f(x,y,z) = g(x+y, x-z))$
   $= (x+y+2(x-z), 3(x+y) - x + z, x+y+x-z)$
   $= (3x+y-2z, 2x+3y+z, 2x+y-z)$
4. Soit $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, telle que : $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
   $f(1,0,0) = (1,1)$ $\quad f(0,1,0) = (1,0)$ $\quad f(0,0,1) = (0,-1)$
   $A = M(f, C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   Soit $C_2 = \{f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$
   $g(f_1) = g(1,0) = (1,3,1)$ $\quad g(f_2) = g(0,1) = (2,-1,1)$
   $B = M(g, C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M(f\circ g, C_2) = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(g\circ f, C_3) = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\mathbf{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{E}$
On considère l'ensemble de vecteurs $\mathbf{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{E}$ tel que :

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 - 2e_2 + e_3 \\ v_2 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3 \\ v_3 = -e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que **B** est une nouvelle base de $\mathbb{E}$
2. Déterminer les matrices de passage de **C** à **B** et de **B** à **C**
3. Déduire l'écriture du vecteur $v = 7e_1 - 9e_2 + 5e_3$ dans la base **B**

Solution 2 $\mathbf{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{E}$:

1. $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$
   $\Longrightarrow \alpha(2e_1 - 2e_2 + e_3) + \beta(2e_1 - 3e_2 + 2e_3) + \gamma(-e_1 + 2e_2) = 0$
   $(2\alpha + 2\beta - \gamma)e_1 + (-2\alpha - 3\beta + 2\gamma)e_2 + (\alpha + 2\beta)$
   comme e_1, e_2, e_3 sont linéairement indépendents alors :
   $$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ -2\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0\}$$
2. les matrices de passage :
   de **C** à **B** : $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et de **B** à **C** : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3. l'écriture du vecteur $v = 7e_1 - 9e_2 + 5e_3$ dans la base **B**
   la matrice de composantes dans **C** :$M_C = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$
   la matrice de composantes dans **B** est
   $$M_B = P^{-1} \times M_C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   $$\Longrightarrow v = 7e_1 - 9e_2 + 5e_3 = \frac{1}{3}(5v_1 + 5v_2 - v_3)$$

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur le corps commutatif $\mathbb{R}$ on défini l'application :

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$$

1. Vérifier que T est linéaire.
2. Donner la matrice (A) associée à T dans la base canonique (E)
3. Déterminer $\operatorname{Im} T$ et $\ker T$, donner des bases
4. Monter que $F = \{f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Trouver les composantes d'un vecteur $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ suivant la base F
6. Déterminer $T(v)$ relativement à la base F. En déduire la matrice B de T relativement à la base F.

Solution 3 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$

1. $T[\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')] = T[\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z']$
   $= [2\alpha y + 2\beta y' + \alpha z + \beta z', \alpha x + \beta x' - 4\alpha y - 4\beta y', 3\alpha x + 3\beta x']$
   $= (2\alpha y + \alpha z, \alpha x - 4\alpha y, 3\alpha x) + (2\beta y' + \beta z', \beta x' - 4\beta y', 3\beta x')$
   $= \alpha T(x,y,z) + \beta T(x',y',z')$
   Donc T est linéaire
2. $T(1,0,0) = (0,1,3)$; $T(0,1,0) = (2,-4,0)$; $T(0,0,1) = (1,0,0)$
   $$A = M(T,E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. $\ker T = \{(x,y,z); T(x,y,z) = (0,0,0)\}$
   $$\begin{array}{l} 2y+z=0 \\ x-4y=0 \\ 3x=0 \end{array} \Rightarrow \{x=y=z=0\} \Rightarrow \ker T = \{(0,0,0)\}$$
   $$\operatorname{Im} T = \{(X,Y,Z) = T(x,y,z)\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2y+z = X \\ x-4y = Y \\ 3x = Z \end{bmatrix}$$
   $(X,Y,Z) = (2y+z, x-4y, 3x) = (z,0,0) + (2y,-4y,0) + (0,x,3x)$
   $= z(1,0,0) + y(2,-4,0) + x(0,1,3)$
   alors $\operatorname{Im} T$ est généré par :$\{v_1 = (1,0,0), v_2 = (2,-4,0), v_3 = (0,1,3)\}$
   On a donc : $\dim(\ker f) = 0$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$

   On a $\det(A) = 12 \neq 0$ donc $rang(A) = 3 \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 3$

4. $F = \{f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,0,0)\}$
   $(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha)$
   $$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma = x \\ \alpha+\beta = y \\ \alpha = z \end{array}\right\} \Rightarrow \{\alpha = z, \beta = y-z, \gamma = x-y\}$$
   $\Rightarrow \mathbb{R}^3$ est généré par les vecteurs de F.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha=0\end{array}\right\}\Rightarrow\{\alpha=0,\beta=0,\gamma=0\}$$

et F est une famille libre donc F est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. La matrice de passage de $E\longrightarrow F$ est $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

son inverse est : $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

$v_F=P^{-1}v_E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\b-c\\a-b\end{pmatrix}$

$\Rightarrow v=cf_1+(b-c)\,f_2+(a-b)\,f_3$

6. $T(v)=(2b+c,a-4b,3a)=(X,Y,Z)=Zf_1+(Y-Z)\,f_2+(X-Y)\,f_3$
$=(3a)\,f_1+(a-4b-3a)\,f_2+(2b+c-a+4b)\,f_2$
$=3af_1+(-2a-4b)\,f_2+(-a+6b+c)\,f_3$

$T(f_1)=T(1,1,1)=3f_1+(-2-4)\,f_2+(-1+6+1)\,f_3=3f_1-6f_2+6f_3$

$T(f_2)=T(1,1,0)=3f_1+(-2-4)\,f_2+(-1+6)\,f_3=3f_1-6f_2+5f_3$

$T(f_3)=T(1,0,0)=3f_1+(-2)\,f_2+(-1)\,f_3=3f_1-2f_2-f_3$

et par suite $B=M(T,F)=\begin{pmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&-1\end{pmatrix}$

Exercice 4

On considère la matrice

$$M_\lambda=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&3\\2&1&5\\\lambda&4&0\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs λ_n de λ pour les quelles M_λ est singulière.
2. Pour $\lambda\neq\lambda_n$, calculer $\det\left(M_\lambda^{-1}\right)$ et M_λ^{-1}.
3. Soit f_λ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_λ dans la base canonique . Déterminer l'image par f_λ d'un vecteur $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$
4. Déterminer l'image et le noyau de f_λ

Solution 4 :

1. M_λ est inversible si $\det(M_\lambda)\neq0$

$\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&3\\2&1&5\\\lambda&4&0\end{pmatrix}=4+17\lambda\Longrightarrow M_\lambda$ est inversible si $\lambda\neq\dfrac{-4}{17}$

2. $M_\lambda^{-1}=\dfrac{1}{4+17\lambda}\begin{pmatrix}-20&12&-3\\5\lambda&-3\lambda&5\lambda+1\\-\lambda+8&4\lambda-4&1-\lambda\end{pmatrix}$

3. $f_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ \lambda & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x+3z \\ 2x+y+5z \\ \lambda x+4y \end{pmatrix}$

4. $\begin{cases} (1-\lambda)x+3z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ \lambda x+4y=0 \end{cases} \Longrightarrow x=0, y=0, z=0$

$\Longrightarrow \ker f_\lambda = \{0\}, \dim \operatorname{Im}(f_\lambda) = 3 \Longrightarrow \operatorname{Im}(f_\lambda) = \mathbb{R}^3$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2y, 3x-y)$

1. Trouver la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
2. Trouver la matrice B de f dans la base $\{f_1 = (1,3), f_2 = (2,5)\}$
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f
4. Calculer A^{10} et B^{30}

Solution 5 :

1. Soit $E = \{e_1, e_2\}$la base canonique de $\mathbb{R}^2$
   $f(e_1) = f(1,0) = (0,3) \quad f(e_2) = f(0,1) = (2,-1)$
   $A = M(f,E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
2. Soit $F = \{f_1, f_2\}$.
   La matrice de passage de $E \to F$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
   donc :
   $B = M(f,F) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$
   Ou bien on peut utiliser une autre méthode, on calcul les images de f_1 et f_2 et on les reécit dans la base F :
   $f(f_1) = f(1.3) = (6,0) = \alpha f_1 + \beta f_2 = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 5\beta)$
   $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 6 \\ 3\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow [\alpha = -30, \beta = 18] \Longrightarrow f(f_1) = -30f_1 + 18f_2$
   $f(f_2) = f(2,5) = (10,1) = af_1 + bf_2 = (a+2b, 3a+5b)$
   $\begin{cases} a + 2b = 10 \\ 3a + 5b = 1 \end{cases} \Longrightarrow [a = -48, b = 29] \Longrightarrow f(f_2) = -48f_1 + 29f_2$
   on trouve donc $B = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$
3. Les valeurs propres sont les racines de l'équation caractéristique :
   $R(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$
   $R(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \longrightarrow \lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$
   Les vecteurs propres v_i sont tels que : $Av_i = \lambda_i v_i$
   soit $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2$, et $V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -3$

4. soit $Q=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow Q^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

la matrice diagonale est $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

On a $D=Q^{-1}AQ \Longrightarrow A=QDQ^{-1}$

$A^{10}=QD^{10}Q^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}^{10}\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\times 2^{10}+2\,(3)^{10} & 2^{11}-2\,(3)^{10}\\ 3\times 2^{10}-3^{11} & 2^{11}+3^{11}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}24\,234 & -23\,210\\ -34\,815 & 35\,839\end{pmatrix}$

$B=P^{-1}AP=P^{-1}QDQ^{-1}P$

$\Longrightarrow B^{30}=P^{-1}QD^{30}Q^{-1}P$

Exercice 6

Soient $E=\{e_1=(1,0)\,,e_2=(0,1)\}$ et $F=\{f_1=(1,3)\,,f_2=(2,5)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$

1. Trouver la matrice de passage P de E à F
2. Trouver la matrice de passage Q de F à E
3. Vérifier que :$PQ=QP=I$
4. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(3x-4y,x+5y)$
   (a) Démontrer que f est une application linéaire.
   (b) Trouver la matrice M_E de f relativement à la base E et la matrice M_F de f relativement à la base F.
   (c) Vérifier que $M_F=QM_EP$
   (d) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs de M_E et de M_F.
   (e) Calculer M_E^{20}

Solution 6 :

1. la matrice de passage P de E à F
$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$
2. la matrice de passage Q de F à E
$$Q=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

3. $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $QP = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $f(x,y) = (3x - 4y, x + 5y)$

   (a) $f(x,y) = (3x - 4y, x + 5y)$ et $f(a,b) = (3a - 4b, a + 5b)$

   $f((x,y) + (a,b)) = f(x + a, y + b) = (3(x + a) - 4(y + b), x + a + 5(y + b))$
   $= (3x - 4y, x + 5y) + (3a - 4b, a + 5b) = f(x,y) + f(a,b)$

   $f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (3\lambda x - 4\lambda y, \lambda x + 5\lambda y)$
   $= \lambda(3x - 4y, x + 5y) = \lambda f(x,y)$

   Donc f est linéaire

   (b) $\left.\begin{array}{l} f(e_1) = f(1,0) = (3,1) \\ f(e_2) = f(0,1) = (-4,5) \end{array}\right\} \Longrightarrow M_E = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   $f(f_1) = f(1,3) = (3 - 12, 1 + 15) = (-9, 16)$
   $= \alpha f_1 + \beta f_2 = (\alpha, 3\alpha) + (2\beta, 5\beta) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 5\beta)$
   $\Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha + 2\beta = -9 \\ 3\alpha + 5\beta = 16 \end{array}\right\} [\alpha = 77, \beta = -43] \Longrightarrow f(f_1) = 77f_1 - 43f_2$

   $f(f_2) = f(2,5) = (6 - 20, 2 + 25) = (-14, 27) = af_1 + bf_2$
   $\left.\begin{array}{r} a + 2b = -14 \\ 3a + 5b = 27 \end{array}\right\} \Longrightarrow [a = 124, b = -69] \Longrightarrow f(f_2) = 124f_1 - 69f_2$

   $M_F = \begin{pmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{pmatrix}$

   (c) $QM_EP = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{pmatrix}$

   (d) M_E et M_F sont semblables donc elles ont les mêmes valeurs et vecteurs propres

   $V_1 = \begin{pmatrix} -1 - j\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 4 - j\sqrt{3}$

   $V_2 = \begin{pmatrix} -1 + j\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 4 + j\sqrt{3}$

   $M_V = \begin{pmatrix} -1 - j\sqrt{3} & -1 + j\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   $M_V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{j\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{j\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$

   et $D = \begin{pmatrix} 4 - j\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 + j\sqrt{3} \end{pmatrix}$

   (e) $M_E^{20} = M_V D^{20} M_V^{-1}$

   $= \begin{pmatrix} -1 - j\sqrt{3} & -1 + j\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - j\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 + j\sqrt{3} \end{pmatrix}^{20} \begin{pmatrix} \frac{j\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{j\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} -5282\,939\,079\,175 & -13\,445\,754\,640\,448 \\ 3361\,438\,660\,112 & 1439\,938\,241\,049 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} -5.282\,9 \times 10^{12} & -1.344\,6 \times 10^{13} \\ 3.361\,4 \times 10^{12} & 1.439\,9 \times 10^{12} \end{pmatrix}$

Exercice 7

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, tel que $f(x,y,z) = (X,Y,Z)$ avec :

$$X = 3x - y + z$$
$$Y = 4x - y + 2z$$
$$Z = -2x + y$$

1. Déterminer La matrice M de f par rapport à la base canonique .
2. Calculer M^2 et en déduire que $\forall\, v \in \mathbb{R}^3\ f^2(v) = f(v)$
3. Déterminer une base et la dimension de $\ker f$.
4. Soit $H = \{V \in \mathbb{R}^3;\ f(V) = V\}$
   (a) Montrer que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
   (b) Trouver une base de H.

Solution 7 :

1. $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$

   on a $f(v) = Mv$ et $f^2(v) = (f \circ f)(v) = f(f(v)) = M^2 v = Mv = f(v)$
3. $\ker f = \{(x,y,z);\ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

   $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = -z, y = -2z$

   $(x,y,z) = (-z,-2z,z) = z(-1,-2,1)$

   Le vecteur $(-1,-2,1)$ est une base de $\ker f$ et la $\dim \ker f = 1$
4. On montre la stabilité de H pour l'addition et la multiplication par scalaire :

   Si $u, v \in H \Longrightarrow f(u) = u$ et $f(v) = v$

   – f est linéaire, donc $f(0) = 0 \Longrightarrow 0 \in H \Longrightarrow H \neq \emptyset$

   – $f(u+v) = \underbrace{f(u) + f(v)}_{\text{du fait que } f \text{ est linéaire}} = u + v \Longrightarrow (u+v) \in H$

   – soit $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha u \Longrightarrow \alpha u \in H$

   Alors H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

   Soit $u = (x,y,z) \in H : f(u) = u \Longrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = x \\ 4x - y + 2z = y \\ -2x + y = z \end{cases} \Longleftrightarrow -2x + y = z$

   $(x,y,z) = (x,y,-2x+y) = (x,0-2x) + y(0,1,1)$

   Les vecteurs $(1,0,-2)$ et $(0,1,1)$ sont linéairement indépendants donc ils constituent une base de H

Exercice 8

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice adjointe de A et $|A|$. En déduire la matrice inverse .
2. Déterminer l'équation caractéristique de A, Démontrer que A vérifie son polynôme caractéristique et retrouver la matrice inverse.
3. Calculer A^{-2}, A^3, A^2

Solution 8 :

1. $adj\,(A) = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\,(A) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Equation caractéristique de A :
$P(X) = |A - XI| = X^3 - 7X^2 - 6X + 2 = 0$
$P(A) = A^3 - 7A^2 - 6A + 2I$
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 20 & 20 \\ 8 & 27 & 27 \\ 8 & 26 & 28 \end{pmatrix}$
$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 46 & 152 & 158 \\ 62 & 205 & 213 \\ 62 & 206 & 212 \end{pmatrix}$
$P(A) = \begin{pmatrix} 46 & 152 & 158 \\ 62 & 205 & 213 \\ 62 & 206 & 212 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 6 & 20 & 20 \\ 8 & 27 & 27 \\ 8 & 26 & 28 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

3. $P(A) = A^3 - 7A^2 - 6A + 2I = O$
Multiplions les deux membres par A^{-1}
$A^{-1} \times P(A) = A^{-1} \times \left(A^3 - 7A^2 - 6A + 2I\right) = O$
$A^2 - 7A - 6I + 2A^{-1} = O$
$\Longrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\left(A^2 - 7A - 6I\right)$
$= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 6 & 20 & 20 \\ 8 & 27 & 27 \\ 8 & 26 & 28 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A^{-2} = A^{-1} \times A^{-1} = \frac{-1}{2}\left(A - 7I - 6A^{-1}\right)$
$A^{-3} = A^{-2} \times A^{-1} = -\frac{1}{2}\left(I - 7A^{-1} - 6A^{-2}\right)$

Exercice 9

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcluer les valeurs propres et les vecteurs propres de A
2. Calculer A^{10}

Solution 9 :

1. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \mapsto C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 4-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \mapsto L_2 - L_1}{=} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \mapsto L_3 - L_1}{=} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$= (4-\lambda)(\lambda)(1-\lambda)$

Les valeurs propres sont les racines de $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$

Les vecteurs propres sont v_i tels que : $Av_i = \lambda_i v_i$

Si $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0$ alors : $Av_1 = \lambda_1 v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ b + 3c = 0 \end{cases} \Longrightarrow [a = c, b = -3c]$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -3c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ soit } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 = v_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = x \\ 2x + y + z = y \\ y + 3z = z \end{cases} , \Longrightarrow \left[x = -\frac{1}{2}z, y = -2z\right] \text{ soit } V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 4 \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha + \beta + 2\gamma = 4\alpha \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 4\beta \\ \beta + 3\gamma = 4\gamma \end{matrix} \Longrightarrow [\alpha = \beta = \gamma], V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 4$$

2. La matrice de passage de la base canonique vers la base propre est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$A^{10} = PD^{10}P^{-1}$

Exercice 10

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$défini par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique : $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

1. Trouver $f(v)$ tel que v est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $v = (x, y, z)$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$. Donner les bases et les dimensins .
3. L'endomorphisme f est-il inversible ?. Si oui trouver f^{-1} .
4. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
5. Soit $g = f \circ f$. Calculer $g(v)$.
6. Déterminer $B = M(g, E)$. Comparer A et B.
7. Calculer A^8 et B^{10}

Solution 10 :

1. $f(v) = Av = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$
2. $\operatorname{Im} f = \{(X, Y, Z) = f(x, y, z)\}$
   - On a $f(e_1) = (1, 0, 1)$
     $f(e_2) = (0, 1, 1)$
     $f(e_3) = (1, 1, 2)$
     $f(x, y, z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$
     on remarque que $f(e_1) + f(e_2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 2) = f(e_2)$
     donc $f(x, y, z) = xf(e_1) + yf(e_2) + z(f(e_1) + f(e_2))$
     $= (x+z) f(e_1) + (y+z) f(e_2)$
     Alors une base de $\operatorname{Im} f$ est $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$
   - On peut trouver la base de $\operatorname{Im} f$ par une autre méthode :
     $\operatorname{Im} f = \{(X, Y, Z) = f(x, y, z)\}$
     $X = x + z$
     $Y = y + z \quad \Longrightarrow X + Y = Z$
     $Z = x + y + 2z$
     $\Longrightarrow (X, Y, Z) = (X, Y, X+Y) = (X, 0, X) + (0, Y, Y) = X(1, 0, 1) + Y(0, 1, 1)$
     Base $\operatorname{Im} f = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$

$\ker f = \{(x,y,z) ;\ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

si $(x,y,z) \in \ker f \Longrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{matrix} x+z=0 \\ y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{matrix}$

$\Longrightarrow z = -x = y \Longrightarrow (x,y,z) = (x,-x,-x) = x(1,-1,-1)$

Base $\ker f = \{(1,-1,-1)\} \Longrightarrow \dim \ker f = 1$

3. L'endomorphisme f est inversible si la matrice A est inversible :
   - On sait que $\dim \operatorname{Im} f = rang A$, or $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2 < 3 \Longrightarrow |A| = 0$ donc A n'est pas inversible
     Ou bien :
   - Puisque la 3ème colonne est la somme des colonnes 1 et 2 alors : $|A| = 0$ donc f n'est pas inversible

4. $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$\underset{C_1 \longmapsto C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -(1-\lambda) & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_2 \longmapsto L_2 + L_1}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right)$

$= \left(\lambda^2 - 3\lambda\right)(1-\lambda) = \lambda(\lambda-3)(1-\lambda)$

Les valeurs propres sont λ telles que $P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

Les vecteurs propres sont v_i tels que $Av_i = \lambda_i v_i$

$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda = 0$

$Av_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases} \Longrightarrow [a = -c, b = -c]$

$v_1 = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 0,$

$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 1 \Longrightarrow Av_2 = v_2$

$\begin{cases} \alpha+\gamma=\alpha \\ \beta+\gamma=\beta \\ \alpha+\beta+2\gamma=\gamma \end{cases} \Longrightarrow \gamma = 0 \text{ et } \alpha = -\beta$

$v_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 1,$

$v_3 = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 3$

$\begin{cases} \alpha'+\gamma'=3\alpha' \\ \beta'+\gamma'=3\beta' \\ \alpha'+\beta'+2\gamma'=3\gamma' \end{cases} , \Longrightarrow \gamma' = 2\alpha' = 2\beta'$

$$v_3 = a' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 3$$

5. $g(x,y,z) = f \circ f(x,y,z) = f(f(x,y,z))$
$= f(x+z, y+z, x+y+2z) = (2x+y+3z, x+2y+3z, 3x+3y+6z)$

6. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = A^2$

7. $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1} \Longrightarrow A^8 = PD^8P^{-1}$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^8 \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1094 & 1093 & 2187 \\ 1093 & 1094 & 2187 \\ 2187 & 2187 & 4374 \end{pmatrix}$$

$$B = A^2 \Longrightarrow B^{10} = A^{20} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{20} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$, et soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, dans la base canonique, par :

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \left(\frac{5x}{2} + y + \frac{z}{2}, \frac{x}{2} + 2y - \frac{z}{2}, \frac{-x}{2} - y + \frac{3z}{2}\right)$$

1. Donner la matrice **A** de f relativement à la base canonique **C**
2. Montrer que **A** admet trois valeurs propres comprises entre 1 et 3 que l'on ordonnera dans l'ordre croissant.
3. Déterminer une base **B** formée par de vecteurs propres et les matrices de passage
4. Déduire le calcul de $\mathbf{A}^n$; $n \in \mathbb{N}$. on donnera les 9 éléments de $\mathbf{A}^n$en fonction de n.

Solution 11 :

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $|\mathbf{A}-k\mathbf{I}| = 0$

$$|\mathbf{A}-k\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \frac{5}{2}-k & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2-k & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2}-k \end{vmatrix} \underset{C_1 \mapsto C_1 - C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 1-k & 1 & \frac{1}{2} \\ -1+k & 2-k & -\frac{1}{2} \\ -1+k & -1 & \frac{3}{2}-k \end{vmatrix}$$

$$= (1-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2-k & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2}-k \end{vmatrix} \overset{L_2 \mapsto L_1 + L_2}{=} (1-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3-k & 0 \\ -1 & -1 & \frac{3}{2}-k \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3 \mapsto L_3 + L_1}{=} (1-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = (1-k)\begin{vmatrix} 3-k & 0 \\ 0 & 2-k \end{vmatrix}$$

$$= (1-k)(2-k)(3-k) = 0$$

Donc les valeurs propres sont $k_1 = 1, k_2 = 2$ et $k_3 = 3$

3. Les vecteurs propres sont tels que $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = k_i\mathbf{v}_i$.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = k_1\mathbf{v}_1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b + \frac{1}{2}c = 0 \\ \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c = 0 \\ -\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \{b = c, c = c, a = -c\}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = k_2\mathbf{v}_2 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha - \beta - \frac{1}{2}\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \{\beta = -\gamma, \gamma = \gamma, \alpha = \gamma\}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = k_3\mathbf{v}_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x - y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \implies \{z = z, x = -z, y = -z\}$$

$$\implies \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La base propre est $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

La matrice de passage de $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{B}$ est

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ est

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice P^{-1} peut être calculer d'une manière simple :

on a $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -P + 2I$

$P^2 = -P + 2I \implies P^{-1} \times P^2 = P^{-1} \times (-P + 2I)$ *soit* $P^{-1} = \dfrac{1}{2}(P + I)$

4. soit $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} \implies \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 3^n & 3^n - 1 & 2^n - 1 \\ 3^n - 2^n & 3^n + 1 & 1 - 2^n \\ 2^n - 3^n & 1 - 3^n & 2^n + 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P(X)$ de A
2. Vérifier que $P(A) = 0$ et en déduire la matrice inverse de A
3. Utiliser les résultats précédents pour calculer : A^2, A^3, A^4, A^{-2}

4. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2y + 3z = 7 \\ 3z = 3 \end{cases}$$

5. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A
6. On désigne par Q la matrice de passage de la base canonique vers la base constituée par les vecteurs propres de A Déterminer le polynomôme caractéristique de Q et déterminer Q^{-1}
7. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$; $A^n = QD^nQ^{-1}$, où D est la matrice diagonale semblable à A. Calculer A^n.

Solution 12 :

1. A est une matrice triangulaire

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$P(X) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$P(A) = -A^3 + A^2 - 11A + 6I$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^3 + 6\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 11\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2. $-A^3 + A^2 - 11A + 6I = O$

$$\Rightarrow A\left(-A^2 + 6A - 11I + 6A^{-1}\right) = O \Rightarrow -A^2 + 6A - 11I + 6A^{-1} = O$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^2 - 6A + 11I\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 6\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on a $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(A^2 - 6A + 11I\right) \Rightarrow A^2 = 6A^{-1} + 6A - 11I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0 \Rightarrow A^3 = 6A^2 - 11A + 6I$$

$$\Rightarrow A^3 = 6\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 - 11\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 75 \\ 0 & 8 & 57 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A.A^3 = 6A^3 - 11A^2 + 6A =$$

$$6\begin{pmatrix} 1 & 14 & 75 \\ 0 & 8 & 57 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 30 & 270 \\ 0 & 16 & 195 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = \frac{1}{6}A^{-1}\left(A^2 - 6A + 11I\right) = \frac{1}{6}\left(A - 6I + 11A^{-1}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{11}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & -18 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

3. La solution du système est :
$$A^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow x = 3; y = 2; z = 1$$

4. Les valeurs propres de A sont les les racines de l'équation caractéristique : $|A - \lambda I| = 0$
$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Les valeurs propres sont :$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$

Les vecteurs propres sont tels que $AV_i = \lambda_i V_i$

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $Av_1 = \lambda_1 v_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = a \\ 2b + 3c = b \\ 3c = c \end{cases} \Longrightarrow b = c = 0,$$

Pour $a = 1$ on trouve : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

de même $\lambda_2 = 2 \leftrightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 3 \leftrightarrow V_3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A = QDQ^{-1} \Rightarrow A^2 = QDQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^2Q^{-1}$
$A^3 = A^2A = QD^2Q^{-1}QDQ^{-1} = QD^3Q^{-1}$............ $\Rightarrow A^n = QD^nQ^{-1}$
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 + 2^{n+1} & \frac{3}{2} - 3 \times 2^{n+1} + \frac{3}{2} \times 3^{n+1} \\ 0 & 2^n & -3 \times 2^n + 3^{n+1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Exercice 13

On considère la matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A
2. Calculer A^n

Solution 13 :

1. Equation caractéristique de A : $\lambda^3 - 12\lambda + 16 = (\lambda + 4)(\lambda - 2)^2 = 0$ les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -4$ $(simple)$ et $\lambda_2 = 2$ $(double)$

   Les vecteurs propres sont : $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = -4$

   $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \lambda_2 = 2$

   $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A^n = PD^nP^{-1}$

   $$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 0 \\ (-4)^n - 2^n & 2^n + (-4)^n & 2^n - (-4)^n \\ 2^n - (-4)^n & 2^n - (-4)^n & 2^n + (-4)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 14

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n

Solution 14 Equation caractéristique de A : $X^3 - X^2 - 3X + 3 = 0$
Valeurs propres : $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1$
Vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}-2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \sqrt{3}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}-2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow -\sqrt{3} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}-2 & -\sqrt{3}-2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3}+3 \\ 0 & -\sqrt{3} & 3-2\sqrt{3} \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{3}\right)^n\left(2(-1)^n\sqrt{3}+3(-1)^n-2\sqrt{3}+3\right) & -\sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^n-\left(-\sqrt{3}\right)^n\right) \\ 0 & \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^n-\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}\right)^n & \left(\sqrt{3}\right)^n\left(3(-1)^n-2(-1)^n\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\right) \end{pmatrix}$$

Exercice 15

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ dans la base canonique $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ telle que : $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$.
On pose : $f_1=e_1+e_2$; $f_2=2e_1+3e_2$ et $f_3=e_1+e_2-e_3$

1. Montrer que $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Trouver dans cette nouvelle base les composantes du vecteur : $u=e_1+e_2+e_3$
3. Trouver les matrices de passage de E vers F et de F vers E.
4. On définit dans $\mathbb{R}^3$ l'application : $\varphi : \varphi(x,y,z)=(2x,3y,-z)$. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
5. Trouver la matrice de φ dans la base E et en déduire la matrice de φ dans la base F.
6. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ
7. Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$
8. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie, dans la base E, par la matrice :
$$M=M(f,E)=\begin{pmatrix} 6-a & a-4 & -b \\ 9-a & a-6 & -b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$
où a et b sont des nombres réels. Donner la matrice N de f relativement à la base F

Solution 15 $f_1=e_1+e_2$; $f_2=2e_1+3e_2$ et $f_3=e_1+e_2-e_3$

1. On montre que $\forall (x,y,z)\in \mathbb{R}^3\ \exists a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z)=af_1+bf_2+cf_3$
Et que si $af_1+bf_2+cf_3=0 \Longrightarrow a=b=c=0$
2. $u=e_1+e_2+e_3=af_1+bf_2+cf_3$
$=a(e_1+e_2)+b(2e_1+3e_2)+c(e_1+e_2-e_3)$
$=(a+2b+c)e_1+(a+3b+c)e_2-ce_3$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a+2b+c &= 1 \\ a+3b+c &= 1 \\ -c &= 1 \end{cases} \Longrightarrow c=-1$$
$$\begin{cases} a+2b &= 2 \\ a+3b &= 2 \end{cases} \Longrightarrow b=0 \text{ et } a=2$$
$u=2f_1-f_3=e_1+e_2+e_3$

3. La matrice de passage de la base canonique $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ vers la base F est :
   $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   On vérifie que $u_F = P^{-1}u_E$
   $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. Il suffite de montrer que φ est linéaire et que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $\varphi(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
5. La matrice dans la base E est $M_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   Dans la base F la matrice est $M_F = P^{-1}M_E P$
   $M_F = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
6. M_E est diagonale donc les valeurs propres sont $2, 3$, et -1, Par suite les vecteurs propres sont les vecteurs de la base canonique
7. On a $\det(M_E) = -6 \neq 0 \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$, $\ker\varphi = \{(0, 0, 0)\}$
8. Dans la base F la matrice est $N = P^{-1}MP$
   $= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-a & a-4 & -b \\ 9-a & a-6 & -b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$